

İKİ BOYUTLU DİREKT DİNAMİK PROBLEMİN ANALİTİK ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

*Gökhan SEVİLGEN**

Özet: Bu çalışmada, “m” kütleli parçacığın polar koordinat sisteminde iki boyutlu eğrisel hareketine ilişkin diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri geliştirilmiştir. Non-lineer ve homojen olmayan iki adet diferansiyel denklemin eş zamanlı analitik çözümü farklı durumlar için gerçekleştirilmiştir. Diğer taraftan, analitik çözüm sonuçları, MATLAB paket programı yardımıyla elde edilen sayısal çözüm sonuçları ile karşılaştırılmış ve her iki metotla elde edilen sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Elde edilen çözüm fonksiyonlarının, çeşitli mühendislik problemlerine uygulamaları örneklemelerle sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Direkt Dinamik Problem, Analitik Çözüm, Polar Koordinat Sistemi

The Analytical Approaches to the Solution of the Two Dimensional Direct Dynamic Problems

Abstract: In this paper, the analytical solutions of the differential equations of a curvilinear motion of a particle of mass “m” in polar coordinate system were developed. The coupled solutions of the non-linear and inhomogeneous differential equations were obtained analytically for different cases. On the other hand, the analytical solutions were compared to the numerical results obtained by using MATLAB software package and the results were good agreement with the numerical data. The solution functions obtained from the analytical methods were also applied for sample problems on engineering mechanics.

Key words: Direct Dynamic Problem, Analytical Solution, Polar Coordinate System

1. GİRİŞ

Mühendislik problemlerinin büyük bir kısmı, analitik olarak çözüm ihtiva etmeyen lineer ve homojen olmayan diferansiyel denklemlerden oluşur. Genelde bu tür problemlerin çözümü, belirli kabuller(başlangıç ve sınır şartları) altında yarı analitik ve sayısal çözümlerle yanında deneysel verilerle elde edilen ampirik bağıntılar ve gözlemler sonucunda elde edilebilir. Ancak muhtemel analitik çözümler, mühendislik mekaniği problemlerinde ortaya çıkan zorlukları aşmak ve pratik bir takım bilgiler elde etmek için önemli bir matematiksel araçtır. Dinamik problemleri genel olarak direkt dinamik ve ters dinamik problem olmak üzere iki grupta incelenebilir (Sevilgen, 2003; Enferadi ve Akbarzadeh, 2010). Direkt dinamik problemlerde, belirli kuvvetler altında hareket eden cismin yörüngesi tayin edilmeye çalışılırken, ters dinamik problemlerde ise hareket denklemlerinde yer alan hız ve açısal hız gibi verileri kullanarak belirli bir zaman aralığı için, ilgili kinematik bağıntıların çözümü gerçekleştirilir. Diğer taraftan direkt dinamik problemlerin analitik çözümlerine ilişkin

* Uludağ Üniversitesi, Orhangazi Meslek Yüksekokulu, Makine Programı, Orhangazi, 16800 Bursa.

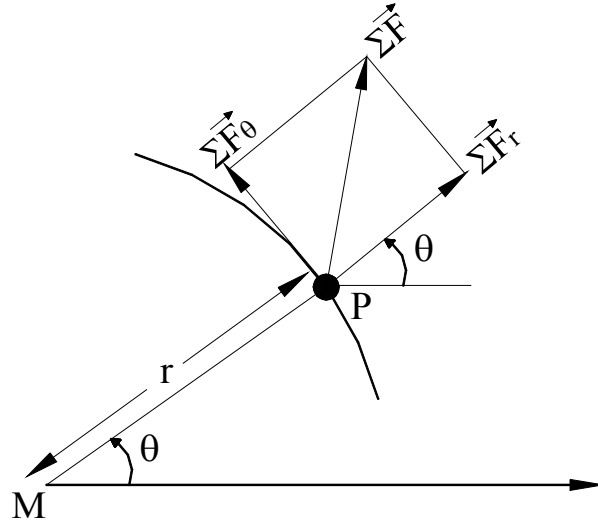
İletişim Yazarı: G. Sevilgen (gsevilgen@uludag.edu.tr)

literatürde yapılan çalışmalar sınırlı sayıda (Pala ve diğ., 2004). Literatürde genel olarak belirli algoritmalar kullanılarak gerçekleştirilen sayısal çözümler mevcuttur (Akbarzadeh ve Enferadi, 2011). Bu çalışmada, başlangıçta maddesel noktanın hareketini içine alan direkt dinamik problemlerin kuvvet bileşenlerinin sabit olduğu durumda hareket denklemlerinin özel çözümüne ilişkin yöntemler sunulmakta sonrasında ise kuvvet bileşenlerinin değişken olduğu durumlar için bir takım çözüm önerileri getirilmektedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Kutupsal Koordinatlarda Maddesel Noktanın Hareket Denklemleri

Düzlemde, “ m ” kütleli maddesel noktanın üzerine etkiyen bileşke kuvvet ΣF , kutupsal koordinat(r, θ) sisteminde bileşke kuvvetin r ve θ doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla ΣF_r ve ΣF_θ olmak üzere, m kütleli bir cismin düzlemde eğrisel hareketine ilişkin bileşke kuvvet ve kuvvet bileşenleri Şekil-1’de gösterilmiş olup, maddesel noktanın hareketine ilişkin diferansiyel denklemler ise (2.1) ve (2.2) ifadelerinde yer almaktadır (Sevilgen, 2003).



Şekil 1:
Kutupsal koordinatlarda m kütleli maddesel noktanın eğrisel hareketi

$$\Sigma F_r = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

$$\Sigma F_\theta = m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \quad (2.2)$$

Yukarıda (2.1) ve (2.2)’de belirtilen hareket denklemleri, non-lineer homojen olmayan adi diferansiyel denklem özelliklerine sahip olup bu denklemlerin birlikte eş zamanlı analitik

çözümüne ilişkin çalışmalar literatürde oldukça sınırlı sayıdadır. (2.1) ve (2.2)'te yer alan denklemler, mühendislik notasyonu ile aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (2.3)$$

$$\sum F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (2.4)$$

Hareket denklemlerinde yer alan hız(dr/dt), açısal hız ($d\theta/dt$) gibi verilerin belirli bir zaman aralığı için çözümü isteniyorsa burada yapılacak olan doğrudan doğruya istenen veriler dikkate alınarak belirli bir t(zaman) anına ait kinematik bağıntıları bulmak olacaktır. Bu tür dinamik problemlere “ters dinamik problemler” adı verilir.

Yukarıdaki denklemlerin çözümü için problem verileri eşitliğin sol tarafında yer alan kuvvetler ile ilgili olup, çözüm için eşitliğin sağ tarafında yer alan diferansiyel terimler kullanılıyor ve doğrudan matematiksel çözümler içeriyorsa, bu tür dinamik problemlere “direkt dinamik problemler” adı verilir.

Kuvvet bileşenlerinin belirli olduğu durumda çözüm için iki adet nonlineer diferansiyel denklemin birlikte eş zamanlı çözümü gerekir (Ames, 1968). (θ) doğrultusunda yer alan kuvvet bileşeninin sıfır olduğu durumda, merkezci hareket ve uzay mekaniğinde olduğu gibi, analitik çözümler mümkün hale gelmektedir (Hibeler, 1995; Pala, 2000).

Bu çalışmada ise direkt dinamik çözüm yaklaşımı ile kutupsal koordinat sisteminde “m” kütleli maddesel noktanın hareketine ilişkin diferansiyel denklemlerde (2.3-2.4) yer alan kuvvet bileşenlerinin sabit olduğu durumlar için analitik çözümler geliştirilmeye çalışılmıştır. Geliştirilen analitik çözüm fonksiyonları, kısıtlayıcı fonksiyonlar, çözüme ilişkin kabuller ve başlangıç koşulları Tablo 1 ‘de yer almaktadır.

I. ve II. Durumlarda oluşturulan analitik çözümler matematiksel bir çözüm oluşturmakla beraber, fiziksel olarak gerçek hayatta başlangıç koşulları üzerinde getirilen kısıtlayıcı şartlar bir takım uygulama zorlukları ortaya çıkarabilir. Bu bakımdan III. Durumda geliştirilen analitik çözüm, sadece kuvvet bileşenleri üzerinde kısıtlayıcılar kullanmak hem matematiksel hem de fiziksel uygulanabilirlik bakımından daha kullanışlı bir çözüm yöntemidir.

Tablo 1. Analitik çözüm fonksiyonları ve başlangıç anındaki kısıtlayıcı şartlar

Durum	Kabuller	Çözüm Yaklaşımı	Başlangıç ($t = t_0$) anındaki kısıtlayıcılar
I	$\sum F_r$ sabit	$\frac{d\theta}{dt} = (c_0)r^a t^b$	2 adet kısıtlayıcı şart $\dot{r}_0 = \frac{2F_\theta^*}{3c_0} \sqrt{r_0} \neq 0$ $\dot{\theta}_0 = \frac{c_0}{\sqrt{r_0}} \neq 0$
	$\sum F_\theta$ sabit	Çözüm sonucunda elde edilen analitik fonksiyonlar: $\theta(r) = \frac{3c_0^2}{2F_\theta^*} \ln(r) + c_1$ $r(t) = \left[\left(\frac{F_\theta^*}{3c_0} \right) t + c_2 \right]^2$ $r(\theta) = e^{f(\theta)}$	

Tablo 1. (devamı) Analitik çözüm fonksiyonları ve başlangıç anındaki kısıtlayıcı şartlar

Durum	Kabuller	Çözüm yaklaşımı	Başlangıç ($t = t_0$) anındaki kısıtlayıcılar
II	ΣFr sabit	$r(t) = a.[f(t)]^b$ $\theta(t) = c_1 + c_0.ln(f(t))$	2 adet kısıtlayıcı şart $\dot{r}_0 = 2an \neq 0$; $\dot{\theta}_0 = c_0/n \neq 0$
	ΣF_θ sabit	Çözüm sonucunda elde edilen analitik fonksiyonlar: $f(t) = t + n$ $\theta(t) = c_1 + c_0.ln(t + n)$ $r(t) = a.[t + n]^2$	
Durum	Kabuller	Çözüm yaklaşımı	Başlangıç ($t = t_0$) anındaki kısıtlayıcılar
III	ΣFr sabit	$r(t) = \frac{\dot{r}_0}{d^s}(nt + d)^s$ $\theta(t) = c.ln(nt + d)$	Kuvvet bileşenleri için 2 adet kısıtlayıcı şart $F_r^* = \frac{\dot{r}_0.n}{d} [1 - \frac{c_2^2}{2}]$ $F_\theta^* = \frac{3}{2} \dot{r}_0 . \dot{\theta}_0$
	ΣF_θ sabit	Çözüm sonucunda elde edilen fonksiyonlar $r(t) = \frac{\dot{r}_0}{d}(nt + d)$ $\theta(t) = c.ln(nt + d)$	

2.2. I. Durumda Analitik Çözüm Yaklaşımı

Açısal hız fonksiyonunun (2.5)'de olduğu gibi değiştiği varsayımı ile çözüme başlayalım.

$$w = \frac{d\theta}{dt} = (c_0)r^a t^b \quad (2.5)$$

Bu durumda açısal ivme için (2.6) 'daki ifade elde edilir.

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{\theta} = (c_0).a.r^{a-1} . \dot{r} . t^b + (c_0).r^a . b.t^{b-1} \quad (2.6)$$

(2.5) ve (2.6) 'da yer alan bu ifadeler (2.4)'de yerine yazılırsa,

$$F_\theta^* = \frac{(c_0)}{r} (a + 2).r^{a+1} . \dot{r} . t^b + (c_0).b.r^{a+1} . t^{b-1} \quad (2.7)$$

(2.8) ifadesi elde edilir. (2.7) 'de yer alan ifade de $b = 0$ alalım. Bu durumda yeniden düzenleme yapıldığında (2.8) elde edilir.

$$F_\theta^* = \frac{(c_0)}{r} (a + 2).r^{a+1} . \dot{r} \quad (2.8)$$

(2.8) denklemi ile dr/dt türev ifadesini (2.9) daki gibi elde edebiliriz.

$$\dot{r} = \frac{F_\theta^* (r^{-a})}{(c_0)(a+2)} \quad (2.9)$$

(2.9) ifadesinin, zamana göre birinci türevini ve (2.5) ifadesini (2.3)'te yerine yazarsak (2.10) elde edilir.

$$F_r^* = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -a \left[\frac{F_\theta^*}{(c_0)(a+2)} \right]^2 \cdot r^{-2a-1} - (c_0)^2 \cdot r^{2a+1} \quad (2.10)$$

(2.10) eşitliğinin sağlanması için gerekli yaklaşımlardan bir tanesi eşitliğin sağ tarafında yer alan terimlerin sabit olması gerektiğidir. Bu durumda $a = -0.5$ olarak tayin edilebilir. Bulunan bu katsayı değeri (2.10) ifadesinde yerine yazılıp $k = (c_0)^2$ alınarak düzenleme işlemleri yapılırsa, (2.11)'deki gibi k ' ya bağımlı ikinci dereceden bir fonksiyon bulunabilir. (2.11)'de yer alan ikinci dereceden denklemin kökleri (2.12) 'te yer almaktadır.

$$9k^2 + (9F_r^*)k - 2(F_\theta^*)^2 = 0 \quad (2.11)$$

$$k_{1,2} = \frac{-9F_r^* \pm \sqrt{81(F_r^*)^2 + 72(F_\theta^*)^2}}{18} \quad (2.12)$$

k 'nın pozitif değeri bir çözüm oluşturur ve ayrıca karekök içinde yer alan ifade F_r^* ve F_θ^* 'nın tüm değerleri için tanımlı olduğundan dolayı kuvvetlerin seçiminde çözüm açısından herhangi bir kısıtlama olmadığını söyleyebiliriz. $a = -0.5$ katsayısını yukarıda belirtilen denklemlerde yerine yazıp, integrasyon işlemleri uygulandığında, (2.13)'te belirtilen çözüm fonksiyonları elde edilmiş olur.

$$\theta(r) = \frac{3c_0^2}{2F_\theta^*} \ln(r) + c_1 \quad r(t) = \left[\left(\frac{F_\theta^*}{3c_0} \right) t + c_2 \right]^2 \quad (2.13)$$

Burada yer alan k ve c_i ($i = 0,1,2$) sabit katsayıları problemin başlangıç koşullarından hesaplanabilir. Örnek olarak $m = 0.2$ kg kütleli maddesel noktanın, üzerine aşağıda verilen sabit kuvvetler uygulanmış olsun. Bu durumda Parçacığın hareket yörüngesini kutupsal koordinatlarda bulmaya çalışalım.

$\sum F_\theta = 1\text{N}$ ve $\sum F_r = 6\text{N}$ ve $t = 0$ anında; $r = r_0 = 0,5\text{m}$; $\theta = \theta_0 = 0$ rad olsun.

$$F_r^* = (\sum F_r)/m = \left(\frac{6}{0.2} \right) = 30 = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \quad (2.14)$$

$$F_\theta^* = (\sum F_\theta)/m = \frac{1}{0.2} = 5 = 2r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2 \quad (2.15)$$

Problemde verilen maddesel nokta için hareket denklemleri (2.14) ve (2.15)'deki gibidir. Bu durumda sabit katsayıları bularak, çözüm fonksiyonlarını yazalım.

c_0, c_1, c_2 katsayılarının bulunması: (2.12)'te yer alan ifade, problem verileri için düzenlenip çözümlerse c_0 katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$9k^2 + 270k - 50 = 0 ; k_{1,2} = \frac{-270 \pm \sqrt{270^2 - 4 \cdot 9 \cdot 50}}{18} \quad k = 0.184 = c_0^2 ; c_0 = 0.429$$

Hesaplanan c_0 katsayısı (2.14)'te yer alan çözüm fonksiyonlarında $t=0$ için $r = r_0 = 0.5m$ ve $\theta = \theta_0 = 0 \text{ rad}$ yazıldığında $c_1 = 0.03827$ ve $c_2 = \sqrt{0.5}$ olarak hesaplanır. Bu durumda çözüm fonksiyonlarında bulunan katsayılar yazılıp düzenleme yapılır ise (2.16)'daki çözüm fonksiyonları elde edilir.

$$r(t) = 15.09t^2 + 5.494t + 0.5 \quad \theta(r) = 0.055 \ln(r) + 0.03827 \quad r = e^{(18.181 \theta - 0.696)} \quad (2.16)$$

Örnek olarak verilen problemde yer alan m kütleli maddesel noktanın hareket yörüngesi, başlangıç koşulları üzerindeki kısıtlayıcılar dikkate alınarak elde edilebilir hale gelmiştir. Aynı problemin verileri ve kısıtlayıcı şartları dikkate alınarak MATLAB programında sayısal çözümleme işlemi gerçekleştirilmiştir.

2.3. Kuvvet Bileşenlerinin Sabit Olduğu I. Durumda Hareket Denklemlerinin Örnek Problem İçin Sayısal Çözümü

Bölüm 2.1'de örnek olarak verilen probleme ait hareket denklemlerini aynı başlangıç koşulları için MATLAB programında sayısal olarak çözmeye çalışalım. Aşağıda problemin başlangıç koşulları yer almaktadır.

$$m = 0.2 \text{ kg} ; \Sigma F_\theta = 1N \text{ ve } \Sigma F_r = 6N$$

$$F_r^* = \frac{\Sigma F_r}{m} = \frac{6}{0.2} = 30 ; F_\theta^* = \frac{\Sigma F_\theta}{m} = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$t = 0 \text{ için } r = r_0 = 0,5m ; \dot{r}_0 = \frac{2F_\theta^*}{3c_0} \sqrt{r_0} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot (0.429)} \sqrt{0.5} = 5.494 \text{ m/s}$$

$$\theta = \theta_0 = 0 \text{ rad} ; \dot{\theta}_0 = \frac{c}{\sqrt{r_0}} = \frac{0,429}{\sqrt{0,5}} = 0.607 \text{ rad/s}$$

(2.14) ve (2.15) 'deki 2.denklemleri sayısal olarak MATLAB programında çözdürebilmek için bu denklemleri 1. Mertebeden denklem sistemine dönüştürmek gerekir. Bu amaçla $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$ şeklinde dört adet yeni değişken tanımlayalım. Burada,

$$x(1) = r ; x(2) = dr / dt ; x(3) = \theta ; x(4) = d\theta / dt \quad (2.17)$$

Tanımlamış olduğumuz x değişkenleri arasındaki ilişkiler (2.18) ve (2.19) 'da gösterilmiştir.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx(1)}{dt} = x(2) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx(3)}{dt} = x(4) \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dx(2)}{dt} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dx(4)}{dt} \quad (2.19)$$

(2.18) ve (2.19) ifadeleri, (2.14) ve (2.15)'da yerine yazılırsa,

$$\frac{dx(2)}{dt} = F_r^* + x(1).x(4)^2 \quad (2.20)$$

$$\frac{dx(4)}{dt} = \left(\frac{F_\theta^*}{x(1)}\right) - \left(\frac{2}{x(1)}\right).x(2).x(4) \quad (2.21)$$

MATLAB programında (2.20) ve (2.21) ifadelerinin çözümü için “durum1” adında oluşturduğumuz fonksiyon dosyası örnekte verilen problem için Tablo 2’ de verilmiştir.

Tablo 2. durum1.m dosyası

```
function dx = durum1(t,x)
dx(1)=x(2) ;
dx(3)=x(4) ;
dx=[x(2);30+x(1)*x(4)^2;x(4);(5/x(1)) - (2/x(1))*x(2)*x(4)];
```

MATLAB programında adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümüne ilişkin Runge-Kutta metodunu kullanan Ode45 fonksiyonu, problemin başlangıç değerleri yazılıp çalıştırıldığında (Tablo 3), hareket denklemlerine sayısal çözümü gerçekleştirilmiş olur. Sayısal çözüm sonucu elde edilen değerler Tablo 4’te yer almaktadır.

Bu durumda MATLAB programında elde edilen çözüme ait sayısal değerlerin grafikleri Şekil 2 ve Şekil 3’te gösterilmiş olup Excel yazılımında, Tablo 4’teki değerlere quadratik eğri uydurma işlemi uygulandığında elde edilen fonksiyonel denklemin (2.16)’deki gibi elde edildiği görülür.

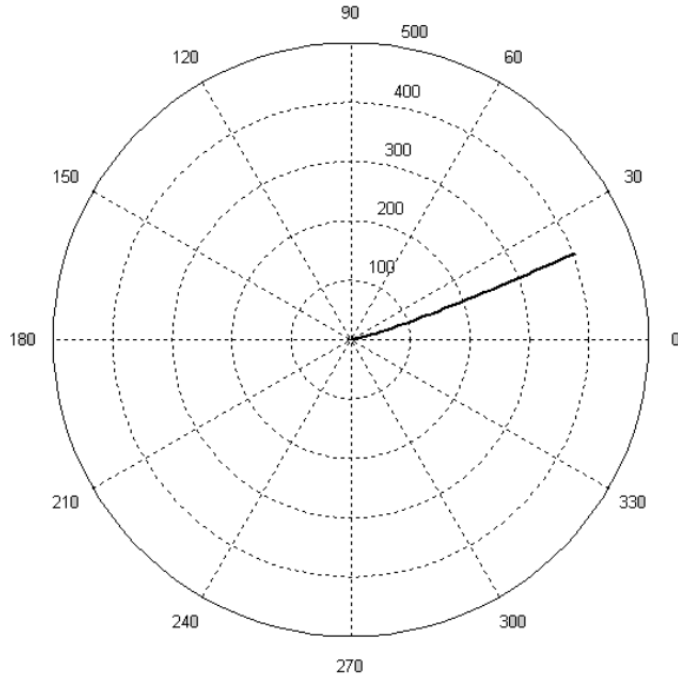
Tablo 3. Ode45 fonksiyonunun kullanımı

```
% Diferansiyel denklemin çözümü:
%[t, x] = ode45 ( 'durum1', [t0 ts], [r0 (dr0/dt) theta (dtheta/dt)] )
[t, x] = ode45 ( 'durum1', [0 5], [0.5 5.494 0 0.607] )
```

Dolayısıyla belirli kısıtlayıcı şartlar altında m kütleli maddesel noktanın hareket yörüngesinin tayini için özel çözüm niteliği taşıyan analitik çözüm sonuçlarının sayısal çözüm sonuçları ile uyum içerisinde olduğu söylenebilir.

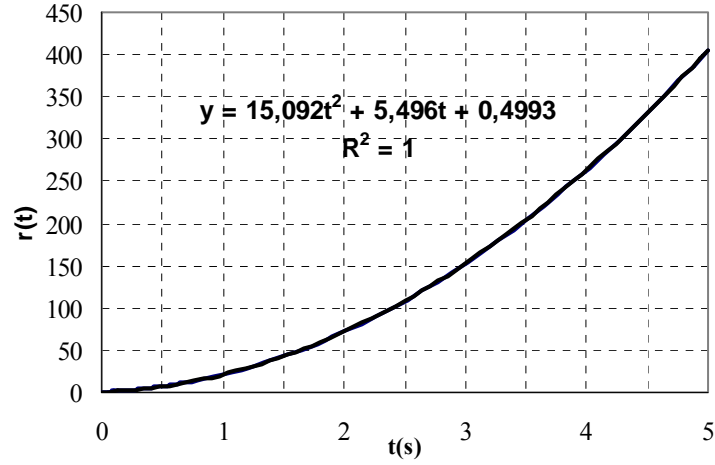
Tablo 4. MATLAB yazılımında sayısal çözüm sonrası elde edilen sayısal veriler

t(s)	r(t)	t(s)	r(t)	t(s)	r(t)	t(s)	r(t)
t	x(1)	t	x(1)	t	x(1)	t	x(1)
0,000	0,50	0,115	1,33	0,857	16,30	3,019	154,60
0,000	0,50	0,136	1,53	0,931	18,69	3,144	166,91
0,000	0,50	0,158	1,74	1,005	21,25	3,269	179,69
0,000	0,50	0,179	1,97	1,079	23,98	3,394	192,95
0,000	0,50	0,200	2,20	1,152	26,87	3,519	206,67
0,001	0,50	0,227	2,53	1,247	30,83	3,644	220,87
0,001	0,51	0,254	2,87	1,342	35,05	3,769	235,54
0,002	0,51	0,282	3,24	1,437	39,55	3,894	250,68
0,002	0,51	0,309	3,63	1,532	44,32	4,019	266,29
0,004	0,52	0,344	4,17	1,653	50,84	4,144	282,38
0,006	0,53	0,378	4,74	1,775	57,80	4,269	298,93
0,008	0,55	0,413	5,35	1,897	65,22	4,394	315,96
0,010	0,56	0,448	5,99	2,019	73,08	4,519	333,46
0,021	0,62	0,493	6,87	2,144	81,62	4,639	350,76
0,031	0,68	0,538	7,82	2,269	90,63	4,759	368,49
0,041	0,75	0,582	8,82	2,394	100,11	4,880	386,66
0,052	0,82	0,627	9,88	2,519	110,07	5,000	405,27
0,068	0,94	0,685	11,33	2,644	120,49		
0,083	1,06	0,742	12,89	2,769	131,39		
0,099	1,19	0,800	14,54	2,894	142,76		



Şekil 2:

Maddesel noktanın Kutupsal koordinat sisteminde $[r=f(\theta)]$ hareket yörüngesi



Şekil 3:

Maddesel noktanın Kartezyen koordinat sisteminde $[r=f(t)]$ hareket yörüngesi

2.4 II. Durumda analitik çözüm yaklaşımı

Çözüm fonksiyonlarının, sürekli bir $f(t)$ fonksiyonunu içerecek şekilde a , b , c_0 , c_1 sabit katsayılar olmak üzere (2.22)-(2.23) 'te belirtildiği formda olduklarını kabul ederek çözüme başlayalım.

$$\theta(t) = c_1 + c_0 \cdot \ln(f(t)) \quad (2.22)$$

$$r(t) = a \cdot [f(t)]^b \quad (2.23)$$

(2.22) ve (2.23) 'te yer alan ifadelerin zamana göre türev ifadeleri (2.3) 'te yerine yazılırsa, (2.24)'te yer alan ifade elde edilir.

$$F_r^* = a \cdot b \cdot [(b-1) \cdot f(t)^{b-2} \cdot \dot{f}(t)^2 + f(t)^{b-1} \cdot \ddot{f}(t)] - a \cdot c_0^2 \cdot f(t)^{b-2} \cdot \dot{f}(t)^2 \quad (2.24)$$

Bu ifadede $b=2$ için özel bir çözümün olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$F_r^* = 2a \cdot [\dot{f}(t)^2 + f(t) \cdot \ddot{f}(t)] - a \cdot c_0^2 \cdot f(t)^2 \quad (2.25)$$

(2.25) ifadesi elde edilir. Bu ifadede eşitliğin sol tarafında yer alan kuvvet içeren ifadenin değeri sabit olduğu için eşitliğin sağ tarafının da sabit olması gerekir. Bu koşulu sağlayan durumlardan bir tanesi ise eşitliğin sağında yer alan tüm terimlerin ayrı ayrı sabit olması durumudur. Dolayısıyla, $f(t)$ fonksiyonunun zamana bağlı türevinin sabit olması durumunun bir özel çözüm fonksiyonu oluşturacağını söyleyebiliriz. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi doğrusal fonksiyon olarak seçebiliriz.

$$f(t) = t + n \quad (2.26)$$

Analitik yaklaşım sonucunda, çözüm fonksiyonları (2.27–2.32)’teki gibi elde edilir.

$$r(t) = a.[t + n]^2 \quad (2.27)$$

$$\theta(t) = c_1 + c_0 \ln(t + n) \quad (2.28)$$

$$\dot{r}(t) = 2a[t + n] \quad (2.29)$$

$$\ddot{r}(t) = 2a \quad (2.30)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{c_0}{t + n} \quad (2.31)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-c_0}{(t + n)^2} \quad (2.32)$$

Kuvvet bileşenlerinin sabit değerini katsayılar cinsinden elde etmek için (2.27–2.32)’deki ifadeleri (2.3) ve (2.4)’te yerine yazılır ise (2.33) ve (2.34)’teki ifadeler elde edilir.

$$F_r^* = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 2a - ac_0^2 \quad (2.33)$$

$$F_\theta^* = (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 3ac_0 \quad (2.34)$$

a, c₀, n, c₁ katsayılarının bulunması:

a, c₀, n, c₁ katsayılarını başlangıç şartlarından bulabiliriz. Bu başlangıç şartları aşağıda ifade edilmiştir.

$$t = t_0 \text{ için } r = r_0 = an^2 \quad ; \quad \theta = \theta_0 \quad ; \quad \dot{r} = \dot{r}_0 = 2an \neq 0 \quad ; \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \frac{c_0}{n} \neq 0$$

c₀ katsayısını bulmak için (2.33) ve (2.34) ifadelerini birbirine oranlayarak e orantı sabitini k olarak tanımlayalım.

$$F_r^* = \frac{\sum F_r}{m} \quad ; \quad F_\theta^* = \frac{\sum F_\theta}{m} \quad \frac{F_r^*}{F_\theta^*} = k = \frac{2a - ac_0^2}{3ac_0} = \frac{2 - c_0^2}{3c_0}$$

$$c_0^2 + 3kc_0 - 2 = 0 \quad (2.35)$$

k değeri problemin başlangıç verilerinden belirli olduğundan dolayı c₀ katsayısı (2.35)’da yer alan 2. dereceden denklemin çözümü ile bulunabilir. Burada c₀ > 0 ‘dır.

$$c_{0(1,2)} = \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 8}}{2} \quad (2.36)$$

c_0 katsayısı ve m kütleli maddesel noktanın üzerine etki eden kuvvet bileşenleri belirli olduğundan dolayı a katsayısı (2.37) ifadesinden bulunabilir.

$$a = \frac{F_\theta^*}{3c_0} \quad (2.37)$$

n katsayısı $t = t_0$ için $r = r_0$ başlangıç şartının (2.27) denkleminde uygulanması ile aşağıdaki ifadede bulunabilir. ($n > 0$)

$$r_0 = a.[t_0 + n]^2$$

c_1 katsayısı $t = t_0$ için $\theta = \theta_0$ başlangıç şartının (2.28) denkleminde uygulanması ile aşağıdaki ifadede bulunabilir.

$$\theta_0 = c_1 + c_0 \cdot \ln(t_0 + n)$$

Başlangıç şartlarından anlaşılacağı gibi bu çözüm yöntemi için kısıtlama sadece v_r (m/s) ve w (rad/s) hızlarının $t=t_0$ anındaki başlangıç değerleri için getirilmektedir. Bu iki değişken dışında diğer parametrelerde herhangi bir kısıtlama yoktur.

2.5 Kuvvet bileşenlerinin sabit olduğu I. durumda hareket denklemlerinin örnek problem için sayısal çözümü

Analitik çözüm yönteminin geçerli olduğu başlangıç koşullarını içeren bir problem örneği aşağıda yer almaktadır.

$m = 0.2 \text{ kg}$; $\Sigma F_\theta = 1N$ ve $\Sigma F_r = 3N$ ve $t=t_0=0$ sn için $r=r_0=0.5m$ ve $\theta=\theta_0=0$ rad olsun.

$$F_r^* = \frac{\Sigma F_r}{m} = \frac{3}{0.2} = 15 ; F_\theta^* = \frac{\Sigma F_\theta}{m} = \frac{1}{0.2} = 5 \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Bu problemin çözümünde geliştirilen analitik çözümün uygulanabilmesi için aşağıda yer alan başlangıç koşullarının olması gerektiği ifade edilmişti. Bu nedenle öncelikle a , c_0 , n , c_1 katsayılarını bulalım.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{r}_0 = 2an ; \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = c_0/n \\ \frac{F_r^*}{F_\theta^*} &= k = \frac{3}{5} \quad c_{0(1,2)} = \frac{-2.25 \pm \sqrt{(81/16) + 8}}{2} \end{aligned}$$

$$c_{01} = 0.682 \quad c_{02} = -2.932 \quad c_0 = 0.682 (c > 0)$$

$$a = \frac{F_{\theta}^*}{3c_0} = \frac{20}{3 \cdot (0.682)} = 9.773 \quad r_0 = a \cdot [t_0 + n]^2 = 0.5 = 9.773 \cdot n^2 ; n = 0.226$$

$$\theta_0 = 0 = c_1 + c_0 \cdot \ln(t_0 + n) = c_1 + 0.682 \cdot \ln(0.226) \quad ; c_1 = 1.014$$

$$\dot{r} = r_0 = 2an$$

$$\dot{\theta} = \theta_0 = c/n$$

$$v_r = r_0 = 9.773 \cdot (0.226)^2 = 4.417 \text{ m/s}$$

$$w = \theta_0 = 0.682/0.226 = 3.018 \text{ rad/s}$$

Başlangıç koşullarında yer alan kısıtlayıcı parametrelere (v_r , w_{θ}) ait değerler bulunduğundan sonra çözüm olarak geliştirilen fonksiyonlarda yerine yazılırsa (2.38),(2.39) ve (2.40) da yer alan çözüm fonksiyonlar elde edilmiş olur.

$$r(t) = 9.773t^2 + 4.418t + 0.499 \quad (2.38)$$

$$\theta(t) = 1.014 + 0.682 \cdot \ln(t + 0.226) \quad (2.39)$$

$$r = f(\theta) = (0.499) \cdot e^{2.932\theta} \quad (2.40)$$

Analitik çözümü karşılaştırmak amacı ile bu problemi sayısal olarak MATLAB programı yardımı ile çözmeye çalışalım.

$$\bar{F}_r = \frac{\sum F_r}{m} = \frac{3}{0.2} = 15 ; \quad \bar{F}_{\theta} = \frac{\sum F_{\theta}}{m} = \frac{4}{0.2} = 20$$

$$t = t_0 = 0 \text{ için } r = r_0 = 0.5 \text{ m} ; \quad \theta = \theta_0 = 0 \text{ rad} ;$$

$$\dot{r} = r_0 = 4.417 \text{ m/s} ; \quad \dot{\theta} = \theta_0 = 3.018 \text{ rad/s}$$

$$x(1) = r ; \quad x(2) = dr/dt ; \quad x(3) = \theta ; \quad x(4) = d\theta/dt$$

Tablo 5 ve Tablo 6'da sayısal program ve MATLAB Command Window ekranındaki çözüm için oluşturulan komut satırları görülmektedir.

Tablo 5. Sabit2.m programı ve Komut Satırı

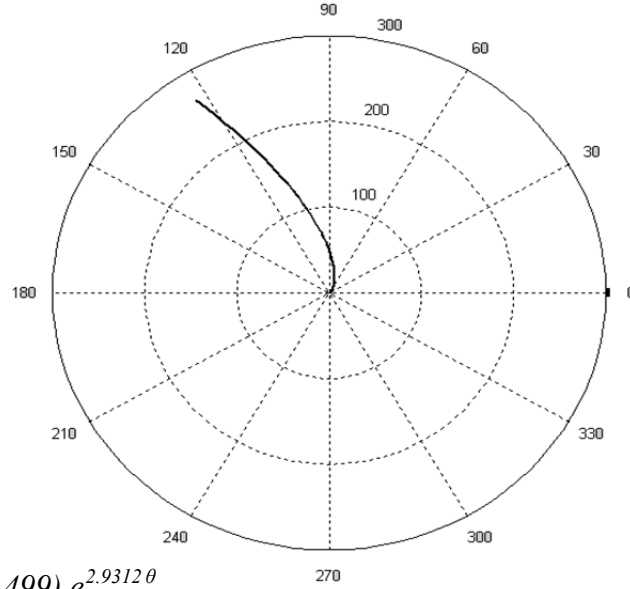
```
function dx = sabit2(t,x)
dx(1)=x(2) ;
dx(3)=x(4) ;
dx=[x(2);15+x(1)*x(4)^2;x(4);(20/x(1) - (2/x(1))*x(2)*x(4)];
```

Tablo 6. Sabit2.m programı ve Komut Satırı

```
% Diferansiyel denklemin çözümü:
%[t, x] = ode45 ('sabit2', [t0 ts], [r0 (dr0/dt) theta (dtheta/dt)])
[t, x] = ode45 ('sabit2', [0 5], [0.5 4.417 0 3.018])
```

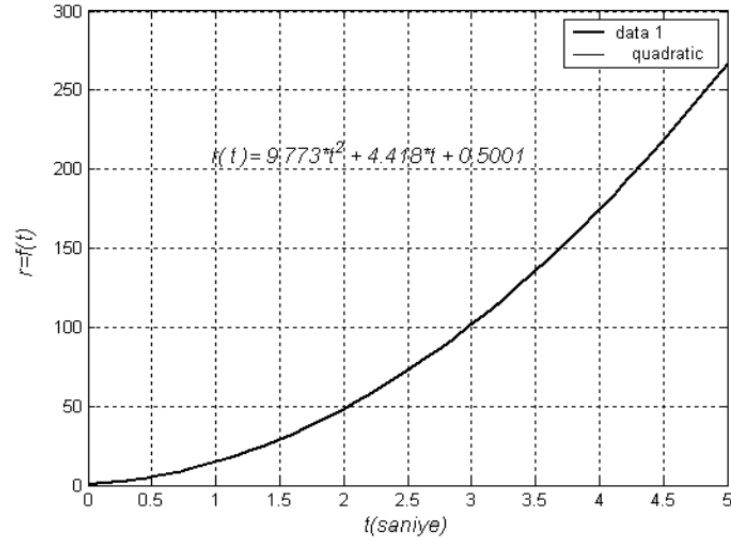
Komut satırının çalıştırılması sonucu diferansiyel denklemin sayısal çözümü elde edilmiş olur. Sayısal çözüm sonrası elde edilen $r = f(t)$ ve $r = f(\theta)$ eğrileri Şekil 4 'te gösterilmiştir. Eğriler için uygulanan eğri uydurma işlemi ile elde edilen $r=f(t)$ fonksiyonunun analitik ifadesi (2.41)'de belirtilmiştir.

$$r(t) = 9.773.t^2 + 4.418t + 0.5001 \quad (2.41)$$



$$r = (0.499).e^{2.9312\theta}$$

(a)



(b)

Şekil 4:

Maddesel noktanın (a) Kutupsal koordinat sisteminde [$r=f(\theta)$] (b) Kartezyen koordinat sisteminde [$r=f(t)$] hareket yörüngesi

MATLAB programı kullanılarak problemin sayısal olarak çözdürülmesi sonucunda elde edilen analitik ifadeler kabul edilebilir bir hata payıyla birbirine yakın ifadelerdir. Bu sonuç bu bölümde geliştirilmeye çalışılan analitik ifadenin uygun başlangıç koşulları seçilerek, bu tür direkt dinamik problemlerin çözümünde kullanılabileceğini doğurur.

2.6. III. Durumda analitik çözüm yaklaşımı

Geliştirilen analitik çözüm fonksiyonları belirli başlangıç koşullarını ihtiva eden kısıtlayıcı fonksiyonlar içermektedir. 2.4 ve 2.5'te açıklanan analitik çözüm yaklaşımları, başlangıç koşullarında kuvvet bileşenlerine ilişkin herhangi bir kısıtlayıcı şart içermemesine rağmen uygulamada başlangıç koşulları üzerinde getirilen kısıtlayıcı şartlar bir takım zorluklar ihtiva edebilir. Bu açıdan değerlendirildiğinde, analitik çözümde sadece kuvvet bileşenleri üzerinde kısıtlayıcı şart kullanımının, hem matematiksel hem de fiziksel uygulanabilirlik bakımından daha kullanışlı bir çözüm yöntemi olduğu söylenebilir. Bu bölümde kuvvet bileşenlerinin sabit olduğu ancak kısıtlayıcı şartların kuvvet bileşenleri için oluşturulduğu bir analitik çözüm geliştirilmeye çalışılmıştır. c , d , n , s katsayıları sabit birer sayı olması koşuluyla, (2.3) ve (2.4) yer alan hareket denklemlerine ait çözüm fonksiyonlarının (2.42), (2.43) 'deki gibi olduğunu kabul ederek analitik çözüme başlayalım.

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{r}_0}{d^s} (nt + d)^s \quad (2.42)$$

$$\theta(t) = c_2 \cdot \ln(nt + d) \quad (2.43)$$

(2.43)'te yer alan ifadeye zamana göre integrasyon işlemi uygulanırsa $r(t)$ fonksiyonu (2.44) 'deki gibi elde edilir. Burada integrasyon sabitini (c_1) sıfır kabul ederek (2.42) ve (2.43) 'te yer alan ifadelerin türevlerini (2.3) hareket denkleminde yerine yazarsak; (2.45)-(2.46)'da yer alan ifadeler elde edilir. Bu ifadelerin geçerli olduğu durumlardan bir tanesi, eşitliğin sağ tarafında yer alan her bir terimin sabit olması şartı kullanılarak elde edilebilir. Bu durum $s = 1$ alınarak sağlanabilir.

$$r(t) = \frac{\dot{r}_0}{n \cdot d^s (s+1)} (nt + d)^{s+1} + c_1 \quad (2.44)$$

$$F_r^* = \frac{\dot{r}_0 \cdot s \cdot n}{d^s} (nt + d)^{s-1} - \frac{\dot{r}_0 \cdot (c_2 \cdot n)^2}{n \cdot (s+1) \cdot d^s} (nt + d)^{s-1} \quad (2.45)$$

$$F_\theta^* = 2 \frac{\dot{r}_0 \cdot c_2 \cdot n}{d^s} (nt + d)^{s-1} - \frac{\dot{r}_0 \cdot c_2 \cdot (n)^2}{n \cdot (s+1) \cdot d^s} (nt + d)^{s-1} \quad (2.46)$$

$s = 1$ alınarak yukarıda yer alan ifadeler yeniden düzenlenirse, (2.47), (2.48), ve (2.49) elde edilir.

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{r}_0}{d} (nt + d) \quad (2.47)$$

$$F_r^* = \frac{\dot{r}_0 \cdot n}{d} \left[1 - \frac{c_2^2}{2} \right] \quad (2.48)$$

$$F_\theta^* = \frac{3\dot{r}_0 \cdot n \cdot c_2}{2 \cdot d} = \frac{3\dot{r}_0 \cdot \dot{\theta}_0}{2} \quad (2.49)$$

c_2 , d ve n katsayılarının bulunması:

Başlangıç Şartları:

$$t = 0 \quad \text{için} \quad \begin{cases} r = r_0 \neq 0 ; \theta = \theta_0 \\ \dot{r} = \dot{r}_0 \neq 0 ; \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \neq 0 \end{cases} \quad F_r^* = \frac{\dot{r}_0 \cdot n}{d} \left[1 - \frac{c_2^2}{2} \right] \quad F_\theta^* = \frac{3\dot{r}_0 \cdot n \cdot c_2}{2 \cdot d}$$

c_2 katsayısının bulunması: (2.48) ve (2.49) denklemlerini birbirine oranladığımızda oluşan ifade (2.50) c_2 katsayısına bağlı ikinci dereceden bir denklem olup, c_2 katsayısı bu denklemin pozitif reel köküdür ve aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\frac{F_r^*}{F_\theta^*} = k \rightarrow c_2^2 + 3kc_2 - 2 = 0 \quad (2.50)$$

$$c_2 = \frac{-3k \pm \sqrt{9k^2 + 8}}{2} \quad (2.51)$$

d katsayısının bulunması: $t = t_0$ için $\theta = \theta_0 = c_2 \cdot \ln(d)$ başlangıç şartından d katsayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$d = e^{\theta_0 / c_2} \quad (2.52)$$

n katsayısının bulunması: $t = t_0$ için $d\theta / dt = d\theta_0 / dt = c_2 \cdot (n/d)$ başlangıç şartından n katsayısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$n = \frac{\dot{\theta}_0 \cdot d}{c_2} \quad (2.53)$$

Yukarıda açıklanan başlangıç koşulları dikkate alınarak geliştirilen bu çözümü sayısal veriler içeren bir mühendislik problemine uygulamaya çalışalım.

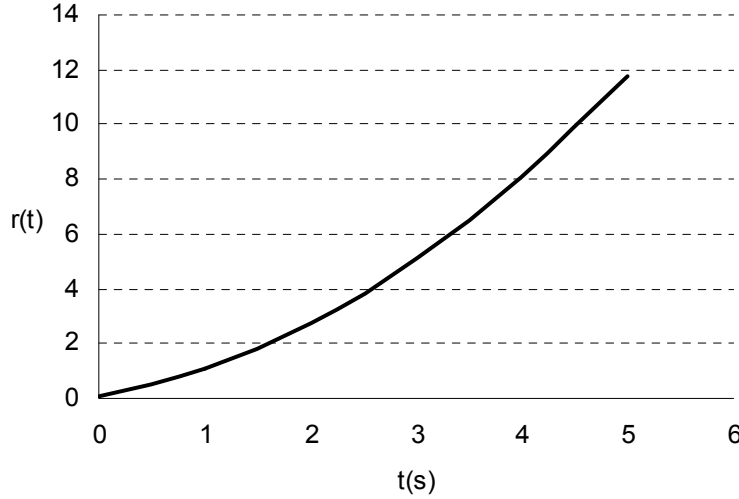
$$\sum F_r = 3N, \quad m = 0.2kg$$

$$t = 0 \quad \text{için} \quad \begin{cases} r_0 \neq 0.1m ; \theta_0 = 0 \text{ rad} \\ \dot{r}_0 \neq 0 = (2/3)m/s ; \dot{\theta}_0 = 1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Yukarıda başlangıç koşulları verilen problem için (2.50) ifadesi uygulanırsa, $F_{\theta}^* = 1$ ve $\Sigma F_{\theta} = 5N$ olarak hesaplanır ve c_2 , d ve n katsayıları “1” olarak bulunur. Bu durumda çözüm fonksiyonları (2.54)’deki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{r_0}{d^s} (nt + d)^s = \frac{2}{3} (t + 1) \rightarrow r(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} + 0.1 \\ \theta(t) &= c_2 \cdot \ln(nt + d) = \ln(t + 1) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Yukarıdaki problem için elde edilen konuma ait çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 5’te yer almaktadır.



Şekil 5:
Konumun zamana bağlı değişim grafikleri

Bu yöntemin, kuvvet bileşenleri üzerine getirilen kısıtlama düşünüldüğünde, diğer kısımlarda geliştirilen yöntemlere göre daha uygun olduğu söylenebilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, “m” kütleli parçacığın polar koordinat sisteminde iki boyutlu eğrisel hareketine ilişkin diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri geliştirilmiştir. Non-lineer ve homojen olmayan iki adet diferansiyel denklemin eş zamanlı analitik çözümü kuvvet bileşenlerinin sabit olduğu durumlar için gerçekleştirilmiştir. Üç farklı durum için sonuçlar irdelenmiş ve çözüm fonksiyonlarının hangi durumlar için geçerli olduğu belirtilmiştir. MATLAB paket programı yardımıyla elde edilen sayısal çözüm sonuçları ile karşılaştırılmış ve her iki metotla elde edilen sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Ayrıca uygulama açısından düşünüldüğünde, kuvvet bileşenleri için kısıtlayıcılar içeren çözüm fonksiyonlarının, fiziksel olarak gerçek hayatta daha uygulanabilir olduğu belirtilmiştir.

4. SONUÇLAR

Gerçekleştirilen bu çalışmanın, literatürde direkt dinamik problemlerin çözümünde analitik yöntemlerin az sayıda olması ve analitik yöntemlerin pratikte kolay ve uygulanabilir olması nedeniyle birçok araştırmacıya yön vereceği kanaatindeyim. Elde edilen çözüm fonksiyonlarının, çeşitli mühendislik problemlerine uygulamaları örneklemelerle sunularak belirli koşullar içeren problemler için pratik sonuçlar almanın mümkün olduğu sonucuna varılmıştır. Daha sonraki çalışmalarda ise kuvvet bileşenlerinin değişken olduğu durumlar için analitik çözümler geliştirmeye yönelik sayısal ve matematiksel çalışmalar üzerinde durulacaktır.

SİMGELER DİZİNİ

$a, b, c_0, c_1, c_2, d, n, s$: Sabit katsayılar
F	: Kuvvet (N)
ΣF_r	: Radyal (r) doğrultudaki toplam kuvvet bileşeni (N)
ΣF_θ	: (θ) doğrultusundaki toplam kuvvet bileşeni (N)
m	: Kütle (kg)
k	: II. dereceden fonksiyonda bağımsız değişken
θ	: Silindirik koordinatlarda açı (radyan)
r	: Silindirik koordinatlarda yer değiştirme vektörü
\dot{r}	: Yer değiştirme vektörünün zamana göre 1. türevi
\ddot{r}	: Yer değiştirme vektörünün zamana göre 2. türevi
t	: Zaman(saniye)
v	: Hız (m/s)
w	: Açısal hız (radyan/saniye)
$\dot{\theta}$: Açısal fonksiyonun zamana göre 1. türevi
$\ddot{\theta}$: Açısal fonksiyonun zamana göre 2. türevi

KAYNAKLAR

1. Akbarzadeh A. and Enferadi J. (2011). A Virtual Work Based Algorithm for Solving Direct Dynamics Problem of a 3-RRP Spherical Parallel Manipulator, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 63(1), s: 25-49.
2. Ames, F.W. (1968). Nonlinear ordinary differential equations in transport process, Academic, New York, 23-85.
3. Enferadi J. and Akbarzadeh A. (2010). Inverse dynamics analysis of a general spherical star-triangle parallel manipulator using principle of virtual work, Nonlinear Dynamics, 61(3), s:419-434.
4. Hibeler, R.C. (1995). Engineering Mechanics: Dynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 57-65, 125-129.
5. Pala, Y. (2000) Mühendislik Dinamiği, Gaye Yayınevi, s 60-70
6. Pala Y., Güney İ. ve Karadere G. (2004). Analytical Solution of Direct Dynamics Problem in Cylindrical Coordinates, Technical Notes ,Journal of Engineering Mechanics, September 2004, 9-1115-1117.
7. Sevilgen G. (2003). Direkt Dinamik Problemlerin Analitik Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, U.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Müh. Anabilim dalı.

Makale 21.03.2012 tarihinde alınmış, 01.08.2012 tarihlerinde düzeltilmiş, 03.08.2012 tarihinde kabul edilmiştir.