Kocaeli Üniversitesi **Sosyal Bilimler** Enstitüsü **Dergisi** (14) 2007 / 2 : 51-77

Açık Artırma Teorisi Üzerine Bir Çalışma

Şevket Alper Koç*

Özet: Bu çalışmada ihaleler üzerine teorik bir araştırma yapılacaktır. Belirli varsayımlar altında model kurulduktan sonra açık artırma çeşitleri incelenecektir. İkisi sözlü ikisi kapalı zarf ihalesi olmak üzere dört standart ihale bilinmektedir. Bunlardan sözlü olan İngiliz ve Flemenk ihaleleri ve kapalı zarf ihalesi olan birinci fiyat kapalı zarf ihalesi pratikte kullanılan, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi ise teorik anlamı olan açık artırmalardır. Bu çalışmada her bir ihale için denge araştırılacak, ve örnekler verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Açık Artırma, Teklif, Denge, Kapalı-Zarf, Denge Gelir Teoremi

Giriş

Açık artırmalar (ihaleler) bugüne kadar çok geniş bir şekilde ele alındı. Vickrey'in 1961'deki çok önemli çalışmasından sonra yapılan çalışmalar açık artırma teorisinde çeşitli konuları ele almışlardır. Myerson (1981) ve Riley ve Samuelson (1981) optimal açık artırmalar üzerine çalışmıştır. Maskin ve Riley (1984) riskten kaçınan (risk averse) teklif verenler için standart ve optimal açık artırmaları ele alarak literatürdeki bu eksikliği tamamlarken Milgrom ve Weber (1982) bağımsız ve bağımlı değerleri ve özel ve ortak değerleri içeren simetrik açık artırmaları inceleyerek katkıda bulunmuşlardır. Hendricks ve Porter (1985), Graham ve Marshall (1987) ve Cramton, Gibbons ve Klemperer (1987) teklif verenler arasındaki ihaleden önce yapılan özel anlaşmaları incelemiştir. Ve son olarak Ashenfelter ve Porter (1989) ve Ingraham (2000) ise ihaleler üzerine ampirik çalışmalar yapmışlardır.

Bu çalışmada ise ihaleler üzerine teorik bir araştırma yapılacaktır. Belirli varsayımlar altında model kurulduktan sonra açık artırma çeşitleri incelenecektir. İkisi sözlü ikisi kapalı zarf ihalesi olmak üzere dört standart ihale bilinmektedir. Bunlardan sözlü olan İngiliz ve Flemenk ihaleleri ve kapalı zarf ihalesi olan birinci fiyat kapalı zarf ihalesi pratikte kullanılan, ikinci fiyat kapalı zarf ihalesi ise teorik anlamı

---

* Yrd. Doç. Dr. Şevket Alper Koç, Kocaeli Üniversitesi İ.İ.B.F. İktisat Bölümü'nde öğretim üyesidir.

olan açık artırmalardır. Bu çalışmada her bir ihale için denge araştırılacak, ve örnekler verilecek ve her bir ihalenin teoride aynı sonucu verdiği gösterilecektir.

1. Genel Model

Bu bölümde her bir ihale için yapılmış olan ortak varsayımlar ihaleye girenlerin ortak özellikleri verilecektir. Modelde bir satıcı, ancak birden fazla potansiyel alıcı vardır.[1] Satıcı başlangıçta tek ve bölünmez bir mala sahiptir. Satıcı herhangi bir alıcının mal için ne kadar ödemek istediğinden habersizdir. Şayet satıcı her alıcının mala biçtiği değeri bilseydi, mala en çok değer biçen alıcıya yaklaşır ve fiyat üzerine onunla anlaşmaya çalışırdı. Ancak satıcı açısından bu strateji, alıcıların mala biçtiği değeri bilmediği için mümkün değildir. Zaten satıcının açık artırma yapmasının sebebi olası alıcılar hakkında kusursuz bilgiye sahip olmamasıdır. İhalenin amacı en iyi alıcıyı tespit ederek en iyi satış fiyatını elde etmektir.

Potansiyel alıcıların sayısı $n \succ 1$, herkes tarafından bilinmektedir. Ancak bir alıcı teklif verdiği zaman başka ne kadar potansiyel alıcının teklif verdiğini bilmez. Bir başka deyişle, bazı potansiyel alıcılar teklif vermeyebilir.

İhaleleri matematiksel olarak daha kolay anlayabilmek için kabul edilen bazı varsayımları, ki bu varsayımlar çoğu durumda mantıklı ve gerçek hayata uyarlanabilir, tanımlamak gerekir.

(Varsayım 1) Özel Değerler: Teklif, kişinin özel bilgisi ve mal için kendi biçtiği değerdir ve bu diğer teklif verenlerin bilgisine bağlı değildir.

Teklif verenin değeri v ile gösterilir. v teklif verenin mala ödemek istediği maksimum parayı gösterir. (V1), teklif verenin, biçtiği değeri sadece kendisinin bildiğini ve bu bilginin kendisinin tek özel bilgisi olduğunu söyler. Modeldeki diğer unsurların herkes tarafından ortak bir şekilde bilindiği varsayılmaktadır.

Bu varsayımını tablo açık artırmalarına uygulamak mümkündür. Bu tür artırmalarda her teklif veren, diğer teklif verenlerin ne düşündüğünü bilmeden tablo için kendi kişisel değerlerini bilmektedir. Bu varsayımın en önemli özelliği bir teklif verenin, bir başka teklif verenin kişisel bilgisini öğrendiğinde kendi değerini değiştirmeyecek olmasıdır.

Bu varsayımının daha az duyarlı olduğu ve kullanılmayacağı durumlara petrol arazi açık artırmaları örneği verilebilir. Petrol arazisi için her teklif verene açık artırma başlamadan önce arazinin sismik testini yapmaya izin verilir. Teklif verenin

[1] Model aynı zamanda bir alıcı ve birden fazla potansiyel satıcının olduğu tedarik ihalelerine de uygulanabilir.

değeri test sonuçlarına bağlı olacağından her teklif verenin değeri birbirinden bağımsız olmayacaktır. Ve bu, birinci varsayımı ihlal edecektir.[2]

(Varsayım 2) Bağımsız Değerler: Teklif verenlerin mala biçtiği değer $v_1,...,v_n$ birbirinden bağımsız dağılırlar.

Bu varsayım her teklif verenin diğer teklif verenlerin değerleri hakkında bilgisiz olduğunu ifade etmektedir. i teklif vereni diğer değerlerin, $v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n$, rasgele olduğunu ve bunların ortak olasılık dağılıma sahip olduğunu kabul etmektedir. İkinci varsayım, her teklif verenin diğerlerinin değerlerinin kendisininkinden bağımsız olduğuna inandığını kabul etmektedir. Yani teklif verenin mala biçtiği değeri bilmesi, diğer teklif verenlerin biçtiği değer hakkında bir bilgi vermeyecektir.

Bu varsayımı tablo açık artırmalarına uygulamak mümkündür. Ama (V1) gibi petrol arazisi açık artırmalarına uygulanmaz. Eğer bir teklif verenin test sonuçları arazide çok petrol olduğunu gösteriyorsa, diğer bir teklif verenin de pozitif test sonucu elde etme olasılığı çok yüksektir. Bu durumda teklif verenler bağımlı değerlere sahip olacaktır.[3]

(Varsayım 3) Simetri: Her rasgele v_i değişkeninin aynı $F(.)$ dağılıma sahiptir.

Simetri varsayımı iki duruma işaret etmektedir. Birincisi, her iki teklif veren, üçüncü bir teklif verenin değerinin dağılımı hakkında aynı inanca, kanaate sahiptir. İkincisi, her teklif veren, diğer teklif verenlerin değerlerinin özdeş dağıldığına inanmaktadır.

(Varsayım 4) Risk tarafsızlığı: Teklif verenler risk açısından yansızdır. (risk neutral) Yani, teklif verenler, risk alma ya da almama konusunda kayıtsızdırlar.

Bu varsayım, her teklif verenin beklenen karını maksimum yaptığını ifade etmektedir. Birçok ihalede, teklif verenin kazanırsa p_w, kaybederse p_l ödeyeceği kabul edilecektir. Eğer teklif verenin mala v_i kadar değer biçtiğini söylersek, kazanması durumunda karı $v_i - p_w$, kaybetmesi durumunda $-p_l$ olacaktır. Dolayısıyla beklenen karı kaybetme ve kazanma olasılıkları altında,

(Kazanma olasılığı) ($v_i - p_w$) + (kaybetme olasılığı) ($-p_l$) (1.1)

---

[2] Petrol arazi açık artırmaları "ortak değer" açık artırmalarıdır. Matthews (1984), Porter (1995) ve Milgrom (1982)

[3] Bazen (V1) ve (V2) tablo açık artırmalarına uygulanmayabilir. Teklif verenlerin hepsinin, hakkında özel bilgiye sahip olduğu belirsiz yeniden satış fiyatı ile karşılaştığını düşünün. Böylece onların değerleri ne özel ne de bağımsız olur.

olacaktır. i teklif verenin kazanma ve kaybetme olasılıkları, ödenen p_w ve p_l, açık artırmanın kurallarına ve teklif verenlerin davranışlarına bağlıdır. i teklif veren, beklenen karını (1.1)'i maksimum yapma amacındadır. [4]

Benzer olarak satıcının risk yansız olduğu kabul edilmektedir. Satıcının mala biçtiği değer v_s 'dir. v_s, satıcının malı satmayı kabul edeceği minimum miktardır ve bu herkes tarafından bilinmektedir.

2. Dört Standart İhale

2.1. İkinci Fiyat İhaleleri (SPA)

Bu ihale türünde teklif verenler aynı anda ve kapalı zarfta teklif verirler. En yüksek teklifi veren ihaleyi kazanır ve en yüksek ikinci teklif kadar para öder. Bu ihale 1961 yılında William Vickrey tarafından ortaya konulmuştur. Çok nadir kullanılsa da, ikinci fiyat ihaleleri teorik olarak öneme sahiptir. [5]

2.2. İngiliz İhaleleri (EA)

Bu ihale türünde teklifler sözel olarak yapılmaktadır. Müzayedeci açık artırmayı herhangi bir fiyattan başlatır. Teklif verenler başka kimse daha yüksek teklif vermek istemeyinceye kadar teklif vermeye devam ederler. En son teklifi veren kişi ihaleyi kazanır ve teklifi kadar para öder. Bu ihale tipi kullanılmış araba ve tablo piyasalarındaki ihalelerde kullanılmaktadır.

2.3. Birinci Fiyat İhaleleri (FPA)

Bu ihale türünde teklif verenler aynı anda ve kapalı zarfta teklif verirler. En yüksek teklifi veren ihaleyi kazanır ve teklifi kadar para öder. Bu ihale tipi daha çok Amerika'da petrol arazisi açık artırmalarında kullanılır.

2.4. Flemenk İhaleleri (DA)

Teklif verenlerden herhangi birisi dur diyene kadar fiyat bir tekerleğin üzerinde ve teklif verenlerin önünde sürekli bir şekilde düşer. Dur diyen kişi kazanır ve tekerle-

---

[4] (V4) olmadan, teklif veren doğrusal olmayan fayda fonksiyonuna sahiptir. (1.1)'deki beklenen karını maksimize etmek yerine beklenen faydası olan Pr(kazanma olasılığı)u_i (v_i-p_w) + Pr(kaybetme olasılığı) u_i (p_i)'yi maksimize eder.

[5] İkinci fiyat açık artırmalarına yakın bir uygulama nadir bulunan pullar için kullanılmaktadır. M. Rothkopf, T. Teisberg, ve E. Kahn, "Why are Vickrey Auctions rare?" JPE 98, Şubat 1990, 94-109.

ğin durduğu yerdeki fiyatı öder. Bu ihale tipi genelde Hollanda'da çiçek satış ihalelerinde kullanılmaktadır.

Satıcının kabul ettiği minimum teklif olan muhammen bedel r ile gösterilir ve dört ihale tipinin de bir parametresidir, kabul edilebilecek tekliflerin alt sınırını gösterir. Birinci ve ikinci-fiyat ihalelerinde tüm verilen teklifler en az r kadar olmalıdır. Eğer hiçbir teklif r 'nin üzerinde değil ise, satış gerçekleşmez. İkinci-fiyat ihalesinde r kazanan tek teklif veren kişiyse satış fiyatına eşit olur. Çünkü bu durumda r bir bakıma ikinci yüksek teklif olur. İngiliz ihalesinde müzayedeci açık artırmaya r 'den başlar ve hiç kimse teklif vermezse satış gerçekleşmez. Flemenk ihalesinde, tekerlek r 'ye düşene kadar teklif verenlerden herhangi birisi dur demezse satış gerçekleşmez. Tüm ihalelerde açık artırma başlamadan önce muhammen bedelin anons edildiği kabul edilmektedir. Dolayısı ile tüm teklif verenler teklif vermeden önce muhammen bedeli bilirler.

Giriş ücreti c ile gösterilmektedir. c her bir ihalenin başka bir parametresidir. Bu, teklif verebilmek için ödenmesi gereken miktardır. Her teklif veren, ihaleye katılıp katılmayacağını karar vererek c giriş ücretini ödemeden önce mala biçtiği kendi değerini bilir.

Yukarıda belirtilen ihaleler için muhammen bedeli ve giriş ücreti SPA(r,c), EA(r,c), FPA(r,c) ve DA(r,c) ile gösterilmektedir.

3. Bazı Olasılık Hesapları

Normalleştirme amaçlı, her v_i değerinin $[0,1]$ aralığında sürekli bir değişken olduğunu varsayalım ve bir değişkenin rasgele olduğunu göstermek için "$\tilde{v}$" sembolü kullanalım. Bu yüzden $\tilde{v}_i$, satıcıya ve diğer teklif veren kişilere göre gerçek değeri i teklif verenin değeri olan rasgele bir değişkendir. $\tilde{v}_i$ için $F(.)$ olasılık dağılımı artan bir fonksiyon ve $\tilde{v}_i$ 'in $(-\infty, v]$ aralığında olma olasılığını gösteren bir fonksiyondur

$$F(v) = \Pr[\tilde{v}_i \leq v]$$

$\tilde{v}_i$ kesin olarak $[0,1]$ aralığında olduğu için $F(0) = 0$ ve $F(1) = 1$ olduğu bilinmektedir.

$F(.)$ $[0,1]$'de sürekli ve pozitif türeve sahip olduğu ve yoğunluk fonksiyonunun $f(.) = F^1(.)$ olduğu varsayılsın. Bu yüzden $\tilde{v}_i$ sürekli olarak dağılmıştır. Dolayısıyla herhangi bir v için $\tilde{v}_i$'nin v'ye eşit olma olasılığı 0'dır. Sonuç olarak,

$$\Pr[\tilde{v}_i < v] = \Pr[\tilde{v}_i \leq v] = F(v)$$

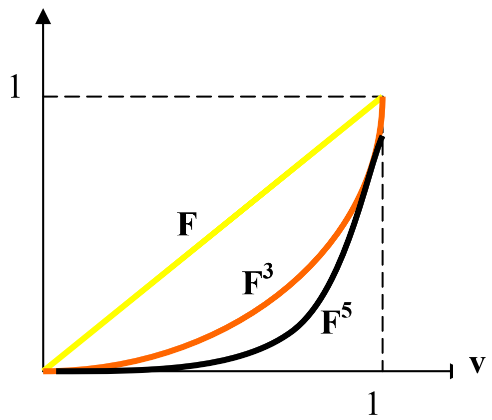
olur.

Burada önemli olacak iki rasgele değer, $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ kümesinin en yüksek ve en yüksek ikinci elemanı olan $\tilde{v}_{(1)}$ ve $\tilde{v}_{(2)}$'dir.[6] Bağımsızlık varsayımı gereği $\tilde{v}_{(1)}$'in dağılımı

$$F_{(1)}(v) = \Pr[\tilde{v}_{(1)} \leq v] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[\tilde{v}_i \leq v] = F(v)^n \qquad (3.1)$$

$v < 1$ için, n'yi artırmak $F_{(1)}(v) = F(v)^n$'i düşürür. Bu durum şekil 1'de gösterilmiştir.

Şekil 1: En Yüksek Değerin Teklif Veren Sayısı Arttıkça Olasılık Dağılımı



6 İstatistikçiler sırasıyla $\tilde{v}_{(1)}$ ve $\tilde{v}_{(2)}$'ye n'inci mertebe ve (n-1)'inci mertebe istatistik adını vermektedirler.

Bu yüzden örnek büyüklüğü n'yi artırmak $\tilde{v}_{(1)}$'i üst sınırı olan 1'e yakın bulma olasılığını arttırmaktadır. Herhangi bir pozitif ε için en yüksek değerin $1-\varepsilon$'u geçme olasılığı, $1-F_{(1)}(v)=1-F(1-\varepsilon)^n$, $n \to \infty$ iken 1 olur. Yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için $F_{(1)}(v)$'nin türevini almak gerekir.

$$f_{(1)}(v)=nF(v)^{n-1}f(v) \tag{3.2}$$

Büyüklüğü n olan örneğin ikinci en büyük değeri $\tilde{v}_{(2)}$'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{(2)}(v)=\Pr\left[\tilde{v}_{(2)} \le v\right]=F(v)^n+n\left[F(v)^{n-1}-F(v)^n\right] \tag{3.3}$$

olur. (3.3), ikinci büyük değerin v'den küçük olabileceği $(n+1)$ çeşit olasılığın toplamını göstermektedir. Olasılıklardan bir tanesi tüm değerlerin v'den küçük olduğu durumu ifade etmektedir. Bu olasılık $F(v)^n$ ile gösterilir. Bir başka olasılık ise, bir $\tilde{v}_i$'nin v'den küçük olma olasılığıdır. Bunun olasılığı da $[1-F(v)]F(v)^{n-1}=F(v)^{n-1}-F(v)^n$ olur. Bu terim her bir i için n kere görüldüğünden (3.3) elde edilmiş olur.

$\tilde{v}_{(2)}$'nin yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için (3.3)'ün türevi alınır;

$$f_{(2)}(v)=n(n-1)F(v)^{n-2}[1-F(v)]f(v) \tag{3.4}$$

Bir başka faydalı rasgele değişken de $\tilde{y}=\max(\tilde{v}_2,...,\tilde{v}_n)$, yani $F(.)$ dağılımından çekilen $(n-1)$ bağımsız değişkenin maksimum değeridir. 1, en yüksek değere sahip, teklif vereni için $\tilde{y}$, diğer teklif verenlerin değerlerinin maksimumunu gösterir. $\tilde{y}$ için kümülatif ve yoğunluk fonksiyonları sırasıyla şöyledir.

$$G(y)=F(y)^{n-1} \text{ ve } g(y)=(n-1)F(y)^{n-2}f(y) \tag{3.5}$$

Örnek: Üniform Olasılık Dağılımı

Üniform dağılımda,

$$F(v)=v \text{ ve } f(v)=1, \exists\, v \in [0,1] \tag{3.6}$$

Bu dağılımda rasgele değişken $\tilde{v}_i$ 'nin $[0,1]$ aralığında herhangi bir değer olma olasılığı aynıdır. Ortalama değeri, $\varepsilon(\tilde{v}_i) = 1/2$ 'dir.

$$F_{(1)}(v) = v^n \text{ ve } f_{(1)}(v) = nv^{n-1} \tag{3.7}$$

$$\varepsilon(\tilde{v}_{(1)}) = \int_0^1 v(nv^{n-1})dv = \frac{n}{n+1} \tag{3.8}$$

$n \to \infty, \varepsilon(\tilde{v}_{(1)})$ artar ve n çok büyük iken $\tilde{v}_{(1)}$ 1'e yaklaşır.

$$f_{(2)}(v) = n(n-1)v^{n-2}(1-v) \tag{3.9}$$

$$\varepsilon(\tilde{v}_{(2)}) = \int_0^1 vf_{(2)}(v)dv = \frac{n-1}{n+1} \tag{3.10}$$

(3.8) v3 (3.10)'dan $\varepsilon(\tilde{v}_{(2)}) < \varepsilon(\tilde{v}_{(1)})$ eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca,

$$G(y) = y^{n-1} \text{ ve } g(y) = (n-1)y^{n-2} \tag{3.11}$$

olur.

4. İkinci Fiyat İhaleler

Öncelikle herhangi bir kapalı zarf ihalesindeki strateji kavramı ile başlamak faydalı olacaktır. Her oyunda olduğu gibi, bir strateji her bir oyuncunun bilgi kümelerini uygun hareketlere eşleştirir. Kapalı zarf ihalesinde bir teklif verenin bilgi kümeleri kendi tipleri ile endekslenir. Bu yüzden stratejisi, tipinin bir fonksiyonudur; örneğin $b_i(.)$, $[0,1]$ aralığında bir fonksiyondur.

Kapalı zarf ihalelerinde teklif verenin davranışları teklif vermemesi ve verebileceği mümkün olan tüm teklifleri içerir. Hareket kümesini $\{0\} \cup [r, \infty)$ olarak gösterebiliriz. Burada "0" teklif vermemeyi gösterir ve $[r, \infty)$ aralığı da kabul edilebilecek mümkün olan tüm teklifleri gösterir. (Kabul edilebilecek teklifler muhammen bedelden büyük olmak zorundadır.) bu yüzden i teklif verenin stratejisi $[0,1] \to \{0\} \cup [r, \infty)$'i gösteren $b_i(.)$ fonksiyonudur.

$SPA(r,c)$, muhammen bedeli r ve giriş ücreti c olan ikinci fiyat ihaleleri gösterdiğini kabul edelim. v değerine sahip bir teklif verenin $b \geq r$ teklif verdiğini varsayalım ve z, eğer başka bir teklif olmuşsa diğer tekliflerin en büyüğü, aksi takdirde $z = r$ olsun. Bu ihalenin kuralları teklif verenin karının aşağıdaki fonksiyon olduğunu ifade eder.

$$A(b,z,v) = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & b < z \text{ ise} \\ (v\text{-}z)\,p(b) - c & b = z \text{ ise} \\ v\text{-}z\text{-}c & b > z \text{ ise} \end{array} \right\rangle$$

$p(b)$ teklif verenin eşitlik halinde kazanma olasılığıdır ve $0 \leq p(b) \leq 1$'dir. Teklif veren beklenen karını maksimum yapmak için bir teklif seçecektir. Genel olarak diğer tekliflerin maksimumunu bilemeyecektir ama bunun yerine $\tilde{z}$ değişkenini bir dağılıma göre rasgele değer olarak görecektir. Buna göre, beklenen karını, $\varepsilon[A(b,\tilde{z},v)]$, maksimum yapmak için en uygun teklifini seçecektir.

Birinci önemli sonucumuz, eğer giriş ücreti $c = 0$ ise, her teklif veren ikinci fiyat ihalesinde dominant stratejiye sahiptir. Yani, her i ve v_i için, diğer teklif verenlerin ne yaptıklarına bakmaksızın, optimum olan bir $b(v_i)$ vardır: Bu strateji, beklenen değeri, $\varepsilon[A(b,\tilde{z},v)]$, $\tilde{z}$ için hangi dağılım kullanılırsa kullanılsın maksimum yapar. Teklif verenin dominant stratejisi, eğer değeri muhammen bedeli geçiyorsa teklif vermektir ve verdiği teklif kendi değerine eşit olmalıdır.

<u>Teorem 4.1:</u> $SPA(r,0)$**'**da, aşağıdaki, her bir teklif verenin dominant stratejidir.[7]

$$b(v) = \begin{cases} v & v > r \text{ ise} \\ \{0\} & v < r \text{ ise} \end{cases}$$

<u>İspat:</u> Önce $v < r$ olduğu durumu ele alalım. $\{0\}$ her teklifi domine eder. Çünkü $\{0\}$ açıkça sıfır kar getirir. Ama herhangi bir pozitif teklif verilmediği zaman, $v - r < 0$ olduğunda kazanan en az r kadar fiyat ödediği için, kazandığında negatif kar elde edecek ve kaybettiğinde ise sıfır kar elde edecektir. Şimdi $v \geq r$ olduğu durumu ele alalım. Önce rakiplerin tekliflerinin en büyüğü olan z'nin bilindiğini farz edelim. z, ihale kazanılırsa ödenecek fiyattır. Yapılan teklif b, sadece kazanıp kazanılmayacağını belirler. Eğer $b > z$ ise ihale kazanılır, yok eğer $b < z$ ise kaybedilir. Eğer $v - z > 0$ ise, kazanmak istenilecek ve $b > z$ olan herhangi bir

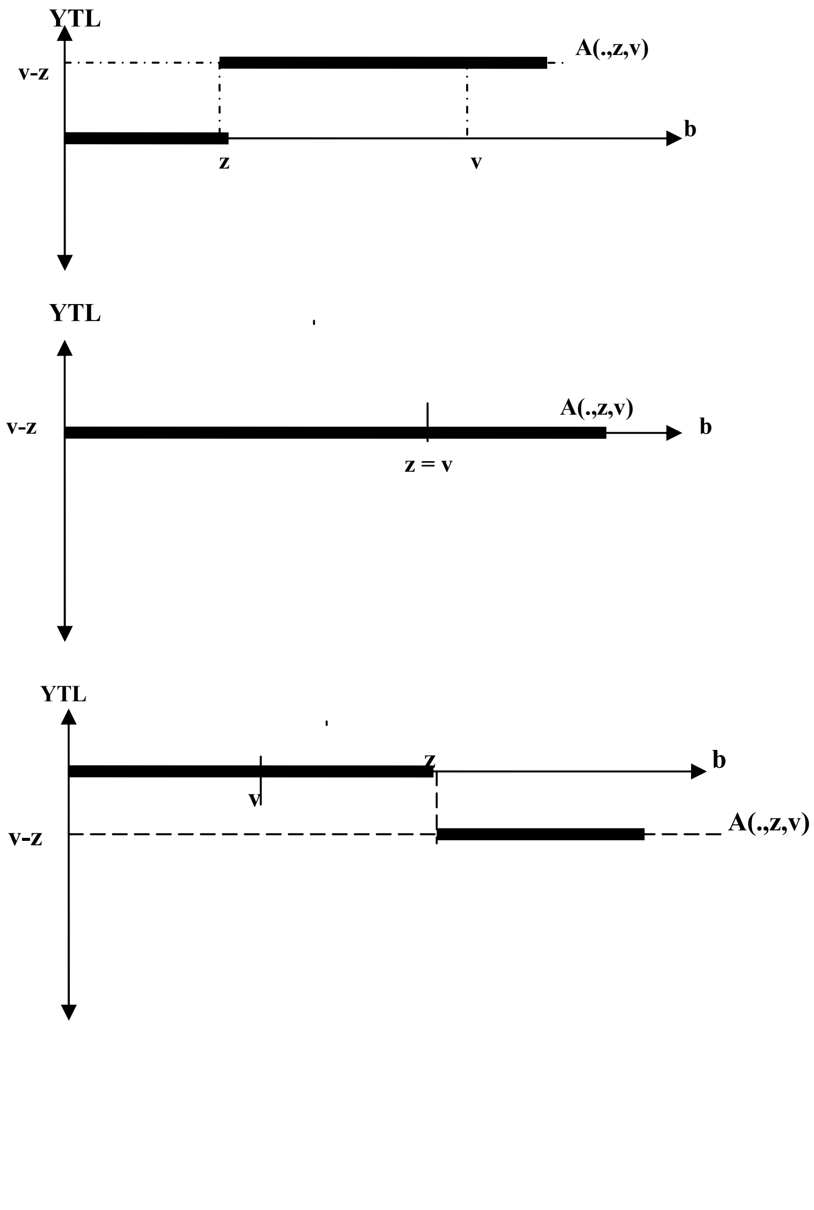
[7] v_i=r için her iki ihalede de, {0} veya b=r hakim stratejidir.

teklif teklif veren için optimum olacaktır. $b = v$ böyle bir tekliftir. Benzer şekilde, $v - z < 0$ ise, kaybetmek daha rasyonel olacaktır ve $b < z$ optimal olacaktır. $b = v$ böyle bir tekliftir. Böylece mala biçilen değer v iken ve rakiplerin teklifleri biliniyorken $b = v$ 'nin teklif veren için en iyi teklif olduğu görülmüştür.

Şimdi rakiplerin tekliflerinin en büyüğünün bilinmediği durumu ele alalım. Bu durum da aslında çok kolaydır. Bir önceki paragraftaki argüman aslında z 'nin kesin değerine bağlı değildir. Bu, z 'nin değerine bakmaksızın sonucun doğru olması gerektiğini ifade etmektedir: $b = v$ her zaman optimaldir. Bu yüzden, eğer rakip tekliflerinin maksimum olanını bilinmezse bile $b = v$ optimal bir tekliftir.

Bu argümanı daha güvenilir kılmak için formalleştirelim. Aşağıdaki şekli inceleyelim, b değiştikçe $A(b, z, v)$ 'yi gösteriyor: $z < v$, $z = v$ ve $z > v$.

Şekil-2- 2: Fiyat Açık Artırmalarında Teklif Verenin Kendi Değerini Teklif Etmesi



Şekil 2, yukarıda tanımlanan argümanın ilk adımı olan ve her durumda $b = v$'nin $A(b,z,v)$'yi maksimum yaptığını göstermektedir z bilinmediği için ikinci adım standart Bayes karar verme teorisinden gelmektedir. z'yi bilmemek onun $h(.)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele bir $\tilde{z}$ değeri olduğuna inanmak demektir.[8] Verilen teklif b ve mala biçilen değer v iken beklenen kar $B(b,v)$ ile gösterildiğinde $B(b,v)$ $A(b,\tilde{z},v)$'nin beklenen değeri olur:

$$B(b,v) = \int_{\infty}^{-\infty} A(b,z,v)h(z)dz \tag{4.1}$$

Yoğunluk fonksiyonları pozitif olduğundan ve birinci adımda $A(b,z,v) \leq A(v,z,v)$ olduğu gösterilmiş olduğundan dolayı her (b,z,v) için bilinmektedir ki;

$$\int_{\infty}^{-\infty} A(b,z,v)h(z)dz \leq \int_{\infty}^{-\infty} A(v,z,v)h(z)dz \tag{4.2}$$

Bu yüzden $B(b,v) \leq B(v,v)$, ve $b = v$ diğer tüm tekliflerden daha fazla kar sağlamaktadır. Bu argüman, rakiplerin davranışları hakkındaki inançlara bağlı olmadan, yani $h(.)$ yoğunluk fonksiyonu ile ilgili olmadığı halde geçerli olduğu için $b(v) = v$ fonksiyonu dominant bir strateji olduğunu ifade etmektedir.

İkinci fiyat ihalesinde kazanan teklifi verenin satıcıya ödediği fiyat hakkında şimdi bir şeyler söylemek mümkündür. Örneğin $SPA(0,0)$'ı ele alalım. $\tilde{w}^2$, teklif verenler dominant stratejilerini oynadıkları zamanki satış fiyatı olsun. Bu stratejiye göre tüm oyuncular kendi değerini teklif vereceğinden en yüksek değere sahip teklif veren kazanacak ve ikinci yüksek değeri ödeyecektir. Bu yüzden,

$$\tilde{w}^2 = \tilde{v}_{(2)} \tag{4.3}$$

Beklenen satış fiyatı, $\varepsilon(\tilde{w}^2)$, satıcının ihaleden elde ettiği beklenen gelirdir. (4.3)'ten,

---

[8] Yukarıdaki argüman $\tilde{Z}$ yoğunluk fonksiyonuna sahip olmasa da geçerlidir.

$$\varepsilon\left(\widetilde{w}^2\right) = \varepsilon\left(\widetilde{v}_{(2)}\right) \tag{4.4}$$

Üniform dağılımda (3.10) ve (4.4)'ten $\varepsilon\left(\widetilde{w}^2\right) = \dfrac{n-1}{n+1}$ olur.

Pozitif giriş ücreti bu sonuçları nasıl değiştirir? Kendi değerlerini teklif vermek artık teklif verenler için dominant strateji olmayacaktır. Giriş ücreti olduğu zaman, teklif verip vermeme kararı kişinin diğer teklif verenlerin nasıl davranacağını düşünmelerine bağlıdır. Örneğin, eğer i teklif vereni bir başka teklif verenin her zaman çok büyük bir teklif vereceğine inanıyorsa, mesela $b > 1$, i teklif vereni kendi değeri kadar, $v_i \leq 1$, teklif verirse kazanamayacağını bilir. Bu yüzden teklif vermek en az giriş ücreti kadar bir maliyeti garanti eder. Böylece i teklif verenin en iyi cevabı "0" olur.

Bununla birlikte diğer teklif verenler tüm strateji profilleri için bir teklif verenin en iyi cevabı teklif vermek ise vereceği en iyi teklif kendi değeridir. Argüman önceki gibidir: $b_i = v_i$ her zaman bir başka tekliften en azından kötü değildir.

Pozitif bir giriş ücreti aynı zamanda muhammen bedele yakın değere sahip teklif verenlerin teklif vermemesine de sebep olur. Bunu görmek için bir teklif verenin teklif vermesi halinde $c > 0$ kadar ödemesi gerektiğine dikkat çekelim. Giriş ücreti hariç maksimum olabilecek kar $(v_i - r)$ olur. Çünkü kazanılması durumunda ödenecek minimum miktar r kadardır. Bu yüzden eğer v_i r'nin çok az üstünde olursa $v_i - r < c$ olacağından kişi teklif vermekten kaçınacaktır.

Marjinal değer, v_0, teklif vermek için teklif verenin değerinin üstünde olması gereken değerdir ve dengenin bir unsuru olarak bulunmak zorundadır. Öncelikle, v_0 değere sahip bir teklif verenin teklif verme ile vermeme arasında kayıtsız olduğunu beklemek gerekmektedir. Yani teklif verenin beklenen karı sıfırdır. Ve bir teklif verenin en iyi teklifi kendi değeri olduğundan, teklif verenin teklifi v_0 olur. Ayrıca diğer teklif verenler teklif vereceklerse, kendi değerlerini teklif vereceklerine göre ve bu değer de v_0'dan büyük olacağına göre v_0 teklif veren ancak ve ancak hiç kimse teklif vermezse ihaleyi kazanacaktır. Bu olayın olasılığı diğer tüm değerlerin v_0'dan küçük olma olasılığıdır ki bu $G(v_0)$'dır. v_0 teklif veren kişi ancak başka hiçbir kimse teklif vermezse kazanacağından, şayet kazanırsa r fiyatı ödeyecektir. Bu yüzden beklenen karı $(v_0 - r)G(v_0) - c$ olacaktır. Beklenen kar 0 olduğundan marjinal değer $v_0(r,c)$ aşağıdaki denklemin çözümü ile tanımlanır:

$$(v_0 - r)G(v_0) = c \tag{4.5}$$

Pozitif giriş ücreti olduğunda da (4.1) teoreminde olduğu gibi, $0 \le c \le 1 - r \le 1$ olduğu sürece $SPA(r,c)$'nin dengesi aşağıdaki gibidir.

$$b_i(v) = \begin{cases} v & v \ge v_0(r,c) \text{ ise} \\ \{0\} & v < v_0(r,c) \text{ ise} \end{cases} \tag{4.6}$$

5. İngiliz İhaleleri

İngiliz ihaleleri teklif verenlerin bağırarak teklif verdikleri sözlü ihaledir. Aslında çalışmak için çok komplike bir objedir. Bir teklif verenin stratejisiyle ilgili çok sayıda ihtimal bulunmaktadır. Örneğin teklif veren bir müddet sessiz kalabilir ama sonra art arda birkaç defa bağırabilir, ya da teklifler yavaşlayana kadar susabilir, veya..... Neticede olasılıklar sonsuz ve çok karmaşıktır.

Bununla birlikte, İngiliz ihalesinin basit bir modelini ele alıp teorik olarak çözmek mümkündür. Bu tür bir modele "düğme ihalesi" denir. Düğme ihalesinde, açık artırma sürekli olarak artarken her teklif veren önündeki düğmeye basmaktadır. Teklif veren istediği bir anda elini düğmeden çekebilir ve ihaleden bir daha geri dönmemek üzere çekilmiş olur. İhale, elini düğmeye basan tek teklif veren kaldığında sona ermektedir. Bu teklif veren ihaleyi kazanır ve kendisinden önceki teklif verenin düğmeden elini çektiği değer kadar fiyat öder. Ayrıca düğmeden elini çekmeyen teklif verenin başka kaç teklif verenin elini düğmeden çekmediğini görmediğini kabul edelim. [9]

Düğme ihalesinde bir teklif verenin mümkün hareketler seti aynı kapalı zarf ihalesinde olduğu gibidir: $\{0\} \cup [r, \infty)$. $\{0\}$ hiçbir zaman düğmeye basmamak anlamına gelir. $b \ge r$ sayısı ise teklifler b'ye ulaştığı zaman elin düğmeden çekilmesini temsil eder. i teklif verenin stratejisi, $b_i(.)$, $[0,1] \to \{0\} \cup [r, \infty)$ fonksiyonudur.

[9] Eğer değerler özel ve bağımsız olmasaydı, bu basit varsayım önemli olurdu. Bu durum ise, İngiliz ihale modelleri için kötü bir durum olurdu.

Basitlik için $r = c = 0$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda teklif veren açık artırma kendi değerinin altında olduğu müddetçe düğmeden elini çekmeyecektir. Eğer bir teklif veren açık artırma kendi değerine ulaşmadan düğmeden elini çekerse ihaleyi kazanıp kendi değerinden az bir fiyat ödeme şansı olduğu halde ihaleyi kaybedecektir. Bu yüzden teklif ve ren, açık artırma kendi değerine ulaşmadan düğmeden elini çekmemelidir. Diğer yandan, açık artırma kendi değerini geçtiği halde düğmeyi serbest bırakmamışsa teklif verenin kaybedeceği halde kazanma şansı olacaktır. Çünkü değerine ulaştığı anda elini düğmeden çekmek diğerleri ne yaparsa yapsın teklif veren için optimal strateji olur. Aynı $SPA(0,0)$ ihalesinde olduğu gibi $b(v_i) = v_i$ stratejisi dominant strateji olumaktadır. Hatta genelleme yapılırsa $SPA(r,c)$'nin dengesi aynı zamanda $EA(r,c)$'nin de dengesi olacaktır.

Böylece $EA(0,0)$'da mal en yüksek değere ($\tilde{v}_{(1)}$) sahip teklif verene satılır. Bu teklif veren, son teklif verenin ihaleden ayrıldığı anda açık artırmanın ulaştığı düzeydeki fiyatı öder. Bu son teklif veren ikinci yüksek değere sahip teklif verendir, $\tilde{v}_{(2)}$. $\tilde{w}^E$, $EA(0,0)$ ihalesindeki satış fiyatı olduğunu varsayalım:

$$\tilde{w}^E = \tilde{v}_{(2)} = \tilde{w}^2 \qquad (5.1)$$

(5.1)'de görüldüğü üzere $SPA(0,0)$ ve $EA(0,0)$'ın beklenen fiyatları birbirine eşit olmuş olur.

6. Birinci Fiyat İhaleler

$FPA(r,c)$ ihalesi incelendiğinde şu durum görülmektedir. Her bir teklif veren ya teklif vermez ya da muhammen bedelden büyük bir teklif verir; en yüksek teklif veren kazanır ve teklif verdiği fiyat kadar öder. Teklif veren herkes giriş ücreti (c), öder.

Şimdilik SPA ve FPA arasındaki farkı mantıksal olarak ele alalım. Kendinizi FPA'ya katılan bir teklif veren yerine koyduğunuzu ve mal için değerinizin 0,5 olduğunu varsayalım. 0,5 teklif vermek optimal olur mu? Kesinlikle olmaz, en azından rakiplerinizin 0,5'ten az teklif vereceği düşünülüyorsa kesinlikle optimal olmayacaktır. 0,5 teklif vererek kazansanız bile 0 kar elde edersiniz çünkü ödeyeceğiniz fiyat sizin değeriniz olacaktır. Ama 0,5'ten biraz az teklif verilirse kazanma olasılığı biraz düşmüş olmakla beraber ihale kazanıldığında pozitif kazanç elde edilmiş olunur.

0,5'ten ne kadar düşük teklif verilecektir? Bu, rakiplerin nasıl teklif verdikleri hakkındaki inançlara bağlıdır. Eğer herkesin 0,25 teklif vereceği düşünülürse 0,25'ten biraz daha fazla teklif vererek kazanabilecek en düşük fiyatla ihaleyi kazanabilir. Ama rakiplerin 0,5'e daha yakın bir teklif verecekleri düşünülseydi kazanabilmek için 0,5'e daha yakın bir teklif vermek zorunda kalınırdı. Eğer herkesin 0,5'ten daha yüksek teklif vereceği düşünülseydi teklif vermek için hiçbir dürtü olmazdı. Bu argüman gösteriyor ki birinci fiyat ihalelerinde teklif veren dominant bir stratejiye sahip değildir. Optimal stratejisi diğerlerinin nasıl teklif verdiklerine dair inancına bağlıdır.

Bu durumu daha formel biçimde ele almak mümkündür Birinci fiyat ihalesinde her teklif veren için $\langle b_1(.),...,b_n(.)\rangle$ stratejileri veri iken, i teklif verenin "kazanma olasılığı" fonksiyonu şöyle tanımlanabilir.

$$Q_i(b) = \mathrm{Pr}ob\lfloor i \text{ kazanma} |\ \text{i b teklifiverir ve j} \neq \text{i } \mathrm{b_j}(.)' ye \text{göreteklifverir}\rfloor$$

Bu fonksiyonu hesaplama durumunda kalınılmayacaktır. i teklif vereni, diğer teklif verenlerin verilen strateji profiline uygun olarak hareket etmelerini beklerse, b teklif verdiğinde kazanma olasılığı $Q_i(b)$ olur. Değeri v_i iken, c giriş maliyeti hesaba katılmazsa beklenen karı,

$$\pi_i(v_i, b) = (v_i - b)Q_i(b) \tag{6.1}$$

olur. Teklif verenin net beklenen karı $\pi_i(v_i - b) - c$ olur ki bu, teklif veren rasyonel davranıyorsa negatif olmamalıdır. Çünkü teklif vermeyerek zaten 0 karı garanti eder. $\langle b_1(.),...,b_n(.)\rangle$ strateji profili, eğer her i ve v_i için $b_i(v_i)$, $\langle b_j(.)\rangle_{j\neq i}$ stratejileri için en iyi cevapsa, Bayes-Nash dengedir.

$$\pi_i(v_i, b) \leq c \Rightarrow b_i(v_i) = \{0\} \text{ tüm } b \geq r \text{ için}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_i[v_i, b_i(v_i)] \geq c \text{ ve} \\ \pi_i[v_i, b_i(v_i)] \geq \pi_i(v_i, b) \end{array}\right. \text{tüm b} \geq \text{r için} \Rightarrow b_i(v_i) \neq \{0\}$$

Öyleyse teklif veren karlı bir şekilde teklif veremiyorsa teklif vermez ve sadece pozitif bir kar yapacaksa teklif verir. Bu durumda da karını maksimum yapmış olur.

Simetrik dengede her $b_i(.)$ stratejisi aynı $b(.)$'ye eşit olur. Kolaylaştırmak için $FPA(0,0)$'ı ele alalım. $FPA(0,0)$'ın dengesi herhangi bir v değerine sahip bir teklif veren aşağıdaki teklifi verir.

$$b^*(v) = \int_0^v y\left[\frac{g(y)}{G(v)}\right]dy \tag{6.2}$$

$b^*(v)$'nin simetrik denge olduğu görülecektir. Ama bu fonksiyonla ilgili 3 tane gözlemi ele alalım.

6.1. Yorum:

Bir teklif verenin denge teklifi, bu değer kendi değerinden az olmak koşuluyla rakiplerinin değerlerinin en yüksek olanının beklenen değerine eşittir.

$$b^*(v) = E[\tilde{y} / \tilde{y} \leq v]$$

Bunu anlamak çok kolaydır. $g(y)$, $(n-1)$ teklifçinin değerinin maksimum olan $\tilde{y}$'nin yoğunluk fonksiyonudur. Bu olayın, yani $(\tilde{y} \leq v)$'nin olasılığı $G(v) = F(v)^{n-1}$'dir. Bu yüzden $\dfrac{g(y)}{G(v)}$, $\tilde{y} \leq v$ iken $\tilde{y}$'nin koşullu yoğunluğudur. Ve böylece (6.2) $\tilde{y}$'nin $\tilde{y} \leq v$ koşuluna bağlı olarak beklenen değeridir.

6.2. Alta teklif verme ve Rekabet

(6.2)'de de görüldüğü üzere teklif verenler diğerlerinden daha az teklif verirler, $b^*(v) < v$. (6.2)'nin kısmi integrali alındığında bu durumu görmek mümkündür.

$b^*(v) = \dfrac{1}{F(v)^{n-1}}\left(\displaystyle\int_0^v yg(y)dy\right)$, parantez içinin kısmi integralin alınca şu eşitliği elde ederiz.

$b^*(v) = \dfrac{1}{F(v)^{n-1}}\left[vF(v)^{n-1} - \displaystyle\int_0^v F(y)^{n-1}dy\right]$. Ve sonuç olarak,

$$b^*(v) = v - \int_o^v \left[\frac{F(y)}{F(v)}\right]^{n-1} dy \qquad (6.2')$$

Alta teklif vermenin miktarı (6.2')'deki integral ile ölçülür. İntegral değişkeni y, v'den küçük olduğu için $\frac{F(y)}{F(v)}$ 1'den küçüktür. $n \to \infty$'a giderken integral 0'a doğru azalır. Dolayısıyla rekabet arttıkça, yani teklif veren sayısı arttıkça alta teklif vermenin miktarı 0'a doğru yaklaşır.

6.3. Gelir Eşitliği

$FPA(0,0)$'ın denge satış fiyatının $\tilde{w}^1$ ile gösterildiğini varsayalım. Bunun beklenen değerinin $\tilde{w}^2$ ve $\tilde{w}^E$'ye eşit olduğu gösterilebilir. Satıcının beklenen geliri $FPA(0,0)$, $SPA(0,0)$ ve $EA(0,0)$ için aynıdır. Bir sonraki bölüm bu sonucu anlatacaktır.

Şimdilik gelir eşitliğinin çok şaşırtıcı olmadığını söyleyelim.[10] $FPA(0,0)$'da teklif verenler kendi değerlerinden daha az teklif verirler. Ama $SPA(0,0)$'da ise kendi değerlerini teklif verirler. Dolayısıyla $SPA(0,0)$'da teklifler daha yüksektir. Ama $FPA(0,0)$'da ise satış fiyatı en yüksek ikinci fiyat değil en yüksek fiyattır. Gelir eşitliği teoremi bu iki etkenin birbirini yok ettiğini ifade etmektedir.

Hatırlatma: $\tilde{w}^1$ ve $\tilde{w}^2$'nin beklenen değerleri eşit olmasına rağmen bunlar iki eşit rasgele değer değildir. İngiliz ve ikinci fiyat ihalelerinde ise $\tilde{w}^2$ ve $\tilde{w}^E$'nin her ikisi de $\tilde{v}_{(2)}$'ye eşittir.

---

[10] Birinci fiyat ihalesinde kazanan teklif verenin teklifi, $b^*(\tilde{v}_{(1)})$, ikinci en yüksek değer olan rakiplerin değerlerinin en yükseğinin beklenen değerine eşittir. Eğer bir teklif verenin değeri en yüksekse, $\tilde{v}_{(1)}$, rakiplerin değerinin en yükseği, $\tilde{y}$, tüm değerlerin en yüksek ikincisine eşit olacaktır, $\tilde{v}_{(2)}$. Yani,

$$E[\tilde{w}^2] = E[b^*(\tilde{v}_{(1)})] = E\{E[\tilde{y} \mathrm{I} \tilde{y} \le \tilde{v}_{(1)}]\} = E\{E[\tilde{v}_{(2)} \mathrm{I} \tilde{v}_{(2)} \le \tilde{v}_{(1)}]\} = E[\tilde{v}_{(2)}] = \tilde{w}^2$$

Örnek: Üniform dağılım için (6.2) ve (6.2')'yi hesaplayalım.

$$b\ (v) = \frac{n-1}{n} - v$$

Beklenen satış fiyatı, (3.8)'ten hesaplanırsa aşağıdaki fonksiyonu elde edilir.

$$\varepsilon\left(\tilde{w}^1\right) = \varepsilon\left[b^*\left(\tilde{v}_{(1)}\right)\right] = \varepsilon\left[\frac{(n-1)}{n}\tilde{v}_{(1)}\right] = \frac{(n-1)}{n}\frac{n}{(n+1)} = \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

$$\varepsilon\left(\tilde{w}^2\right) = \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

Böylece gelir eşitliğinin üniform dağılım için tuttuğu görülmektedir.

Teorem 6.1: $FPA(0,0)$'da,

- (6.2)'de tanımlanan strateji simetrik dengedir ve
- $b(.)$ eğer herhangi bir simetrik denge ise $b(.) = b^*(v)$ tüm $v > 0$ için.

İspat: Milgrom ve Weber (1982)'ye bakın.

7. Hollanda İhaleleri

Hollanda ihalesinde teklif verenlerin önünde bir tekerlek düzenli adımlarla döner ve gösterdiği fiyat düzenli olarak düşer. Teklif verenlerden ilk "dur" diyen ihaleyi kazanır ve "dur" dediğinde tekerin gösterdiği fiyatı öder. Tekerleğin olduğu odaya giren her teklif veren c giriş ücretini öder, ve eğer fiyat r muhammen bedel kadar düşerse obje satılmaz.

Herhangi bir teklif verenin davranışı ya hiçbir zaman tekerleği durdurmamak olan {teklif vermeme}, ya da eğer tekerlek oraya kadar düşerse bir sayı olacaktır. Yani, teklif verenin davranış kümesi $\{0\} \cup [r, \infty)$ olacaktır. Böylece i teklif verenin stratejisi $[0,1] \to \{0\} \cup [r, \infty)$ $b_i(.)$ fonksiyonudur.

Muhammen bedeli r, giriş ücreti c olan Hollanda ihalesi ile birinci fiyat ihalesini karşılaştıralım. Her b_i ya bir sayı ya da $\{0\}$ olan $(b_1, \ldots, b_n)$ davranış profilini ele alalım. Bu profilin her davranışı $\{0\}$ ise, FPA'da hiçbir kimse teklif vermez ve

DA 'da hiç kimse tekeri durdurmaz. Her teklif verenin her iki ihalede de karı sıfırdır. En azından bir kişi teklif verirse, farklı bir durum ortaya çıkar. b_i 'nin en yüksek teklif olduğunu varsayalım. FPA 'da i teklif vereni kazanır ve karı $v_i - b_i - c$ olur. Diğerleri ya sıfır kar ya da $-c$ kar elde ederler. DA 'da hiç kimse tekerlek b_i 'ye ulaşana kadar tekeri durdurmaz, dolayısıyla i teklif vereni b_i 'de durdurur, yine i teklif vereni kazanır ve $v_i - b_i - c$ kar elde eder. Diğerleri katılıp katılmadıklarına bağlı olarak ya sıfır ya da $-c$ kar elde ederler. Görülüyor ki herhangi bir davranış profili tüm teklif verenler için aynı karı sağlıyor.

Bu argüman sonucunda, Hollanda ve birinci fiyat ihale oyunlarının normal formlarının aynı olduğu söylenebilir. Her iki oyun, aynı strateji kümelerine sahip ve aynı davranış profilleri her iki oyunda da her bir teklif verene aynı karı sağlamaktadır. Yani, herhangi bir $\langle b_1(.),\ldots,b_n(.)\rangle$ strateji profili her bir teklif verene aynı karı verir. Bu, iki ihalenin stratejik olarak denk olduğunu gösterir. Teorem (6.1)'de tanımlanan $b^*(.)$ $DA(0,0)$ 'ın da tek dengesidir ve satış fiyatı, $\tilde{w}^D$, $\tilde{w}^1$ 'e eşittir.

8. Teorik İhaleler

Elde ettiğimiz dengenin her oyuncunun oynaması şartıyla $FPA(0,0), SPA(0,0), DA(0,0)$ ve $EA(0,0)$ 'ın aynı beklenen satış fiyatı verdi görülmektedir. Bu şaşırtıcı sonuç "Denk Gelir Teoremi" olarak bilinir. Bu kısımda ihalelerin denk olabilme yolları daha geniş bir şekilde görülecektir.

Başlamadan önce, şu anda tartışılan denkliğin beklenen kar açısından olduğunu ifade etmek gerekmektedir. İki denk ihale hem satıcıya hem de her bir teklif verene aynı beklenen karı sağlamaktadır. Sadece risk nötr bir satıcının denk olarak görebildiği bu anlamda denk olan iki ihalenin satış fiyatları değişik dağılımlara sahip rasgele değişken olabilirler. Muhammen bedeli ve giriş ücreti olan ya da olmayan 4 ihaleden birini, ya da herhangi bir ihaleyi düşünelim. Bu ihalede teklif verenin önem verdiği şey nedir? Risk nötr olduğu için sadece iki değişkene önem verir, kazanma olasılığı, Q, ve beklenen ödemesi, P. v tipi teklif veren, kazanma olasılığı, Q, ve beklenen ödemesi P olan bir davranış seçmişse beklenen karı $Qv - P$ olur. $Q(v-P)+(1-Q)(-P) = Qv - P$

İhalenin dengesini bulmaya çalışalım. Diğer teklif verenler verilen dengeye göre hareket ederlerken bir teklif verenin, mesela Burak'ın denge stratejisi $b(.)$ olsun.

Yani, $b(v)$, Burak'ın değeri v iken en iyi davranış ya da hareket olsun. Burak'ın davranışı b, ihalenin kuralları ve diğer teklif verenlerin değerlerinin olasılık dağılımı ile birlikte Burak'ın kazanma olasılığını ve beklenen ödemesini belirler. Bu, Q ve P'yi b'nin fonksiyonu olarak yani $\hat{Q}(b)$ ve $\hat{P}(b)$ olarak yazabilmek anlamına gelir.

Örnek: $FPA(0,0)$'da

$\hat{Q}(b) = G(\psi(b))$, $\psi(.)$ $b(.)$'nin ters fonksiyonudur yani, $b(\psi(b)) = b$.

$\hat{P}(b) = G(\psi(b))b$

$SPA(0,0)$'da

$\hat{Q}(b) = G(b)$

$$\hat{P}(b) = \Pr(\hat{y} \le b)\varepsilon(\hat{y} / \hat{y} \le b) = \int_0^b yg(y)dy$$

Burak'ın problemi $\hat{Q}(b)v - \hat{P}(b)$ fonksiyonunu maksimum yapmak için b seçmek olarak görülebilir. $b(v)$ Burak'ın değeri v iken onun optimal davranışı olduğu için $b = b(v)$ davranışı bu problemi çözer.

Şimdi, bu problemi direk çözmek yerine bir oyun oynayalım. Farz edelim ki satıcıya direk teklif vermek yerine Burak kendi bilgisayarına bunu programlatsın. Ancak programladığı zaman kendi değerini bilmesin. İhalenin olduğu gün, değerini öğrensin ve bilgisayarını cep telefonundan arasın ve ona değerini bildirsin. Daha sonra bilgisayar programa göre, yani $b(.)$ fonksiyonuna göre teklifi hesaplasın ve satıcıya teklifi bildirsin. Ama Burak hala bir seçim yapmalıdır: Bilgisayarına gerçek değerini rapor etmek yerine bir başka değeri rapor edebilir. Rapor ettiği değere z diyelim. Burak'ın problemi şöyledir:

$$\underset{z}{Max}\, Q(z)v - P(z) \tag{8.1}$$

$Q(.)$ ve $P(.)$ fonksiyonları bilgisayarın davranış kurallarına göre hesaplanır.

$Q(z) = \hat{Q}(b(z))$ ve $P(z) = \hat{P}(b(z))$.

Örnek: Yukarıdaki örnekten yola çıkarak, $FPA(0,0)$'da;

$$Q(z) = G(\psi(b(z))) = G(z) \text{ ve}$$
$$P(z) = G(\psi(b(z)))b(z) = G(z)b(z)$$

$SPA(0,0)$'da,

$$b(z) = z \Rightarrow Q(z) = G(z) \text{ ve}$$

$$P(z) = \hat{P}(b(z)) = \int_0^z yg(y)dy$$

Burak için problem (8.1) çok kolaydır. Her şeyden önce bilgisayar onun optimal stratejisi için programlandığından dolayı Burak için en iyi davranışı sergileyecektir. Eğer Burak doğru değerini rapor ederse, bilgisayar $b(v)$'yi teklif verecektir ki bu gerçek değeri v iken Burak'ın en iyi davranışı olacaktır. Eğer bilgisayara yalan söyleyip $z \neq v$ rapor ederse, bilgisayar $b(z)$ teklif verecektir ki $b(v)$'den iyi olmayacaktır. Bu yüzden $z = v$ problemi (8.1)'i çözer.

Burada takip ettiğimiz kural, bilgi ekonomisinin temel taşlarından olan "Açığa vurma prensibi"dir.

Argüman herhangi bir teklif verene uygulanabilir. Ama herkesin denge stratejileri eşit olmak durumunda değildir. $Q_i(z)$ ve $P_i(z)$ sırasıyla i teklif verenin bilgisayarına değerini z olarak rapor ettiği zamanki kazanma olasılığı ve beklenen ödemesi olsun. Eğer değeri v ise, i teklif verenin denge beklenen karı aşağıdaki gibi olur.

$$\pi_i(v) = Q_i(v)v - P_i(v) \tag{8.2}$$

Gelir denkliği aşağıdaki temel teoremin bir sonucudur. Değeri v_i olduğunda i teklif verenin denge beklenen karını bilmek için hangi bilgiye sahip olunması gerekir? $\pi_i(v_i)$'yi bilmek için, (8.2) denklemi iki tane sayıyı bilmemiz gerektiğini ifade etmektedir $Q_i(v_i)$ ve $P_i(v_i)$. $\pi_i(.)$ fonksiyonunu bilmek için $Q_i(.)$ ve $P_i(.)$ fonksiyonlarının bilinmesi gerekiyor gibi görünmektedir. Ama aslında daha az bilgiye ihtiyaç vardır. Tüm i teklif verenleri optimize etmeye çalıştıklarında $\pi_i(.)$ fonksiyonu sadece bir fonksiyona $Q_i(.)$, ve bir sayıya, $\pi_i(0)$, bağlıdır.

Teorem 8.1: Herhangi bir açık artırmanın herhangi bir dengesinde i teklif verenin beklenen karı sadece onun denge kazanma olasılığı fonksiyonuna, $Q_i(.)$, ve en düşük değere sahip olduğu zamanki denge karına, $\pi_i(0)$, bağlıdır. Yani,

$$\pi_i(v) = \pi_i(0) + \int_0^v Q_i(y)dy \tag{8.3}$$

İspat: $z = v$ (8.1)'i çözdüğü için (8.1)'in z 'ye göre türevi alınıp z yerine v konulduğunda $Q_i^{'}(v)v - P_i^{'}(v) = 0$ sonucu elde edilir. (8.2)'nin de türevi alınırsa $\pi_i^{'}(v) = Q_i^{'}(v) + Q_i(v) - P_i^{'}(v)$ elde edilir. Bu iki denklemden $\pi^{'}(v) = Q_i(v)$ elde edilir. Bunun da integrali alındığında (8.3)'e ulaşılmış olunur.

8.1. Denge Elde Etmek:

(8.2) ve (8.3) denklemleri açık artırma dengesini kolayca elde etmek için kullanılabilir. $FPA(r,c)$'yi ele alalım. Dengede, v_0 marjinal değerinden küçük değere sahip olanların teklif vermediğini ve diğerlerinin de kesin artan bir fonksiyon olan $b(.)$'ye göre teklif verdiklerini varsayalım. Böylece dengede tüm diğer teklif verenlerin değerlerinden ve v_0'dan büyük değere sahip kişi ihaleyi kazanır. Denge kazanma olasılığı şöyledir:

$$Q_i(v) = \begin{cases} 0 & v < v_0 \text{ ise} \\ G(v) & v \geq v_0 \text{ ise} \end{cases} \tag{8.4}$$

Marjinal değere sahip ve katılmayan teklif verenler sıfır kara sahiptir. Yani,

$$\pi_i(v) = 0, \; \mathrm{v} \in [0, \mathrm{v}_0]$$

olur. Böylece (8.2) ve (8.3) aşağıdaki gibi olur:

$$\pi(v) = G(v)v - P(v) \tag*{(8.2)'}$$

$$\pi(v) = \int_{v_0}^{v} G(y)dy \tag*{(8.3)'}$$

$v \geq v_0$ 'a sahip teklif verenlerin beklenen ödemesi ise,

$$P(v) = c + G(v)b(v) \tag{8.5}$$

olacaktır. Bu üç denklemi çözersek aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$b(v) = v - \int_{v_0}^{v} \frac{G(y)}{G(v)} dy - \frac{c}{G(v)} \tag{8.6}$$

(8.6) denge teklif verme fonksiyonudur. Şimdi de v_0 marjinal değerini bulalım. Öncelikle v_0 'a sahip bir teklifçinin sadece hiç kimsenin teklif vermediği durumda kazandığını unutmamak gerekir. $b(v_0)$'dan az teklif verse kazanma olasılığı $G(v_0)$'dır. Teklifini düşürmek kazanma olasılığını etkilemediğinden ve $b(v_0)$ onun optimal teklifi olduğundan $b(v_o) = r$ olmalıdır. Bu yüzden (8.6)'dan yola çıkarak,

$$r = v_0 - \frac{c}{G(v_0)} \tag{8.7}$$

olur. Bu denklem marjinal değeri belirler: $v_0 = v_0(r,c)$. Dikkat edilirse (8.7) (4.5) ile aynıdır ve bu da gösteriyor ki $SPA(r,c)$ ve $FPA(r,c)$ için marjinal değer, v_0, aynı olmaktadır. (8.6) denkleminin kısmi integralini alarak ve (8.7)'yi kullanarak şu genelleme elde edilir:

$$\begin{cases} b(v) = \{0\} & v < v_0 \text{ için} \\ b(v) = \displaystyle\int_{v_0}^{v} y \frac{g(y)}{G(v)} dy \; + r\left[\frac{G(v_0)}{G(v)}\right] & \mathrm{v} \geq \mathrm{v}_0 \text{ için} \end{cases} \tag{8.8}$$

8.2. Denk İhaleler:

Farz edelim ki A ve B gibi iki ihalede, i teklif verenin sahip olabileceği en düşük değere sahip olduğundaki denge beklenen karı eşit olsun, $\pi_i^A(0) = \pi_i^B(0)$. Ve denge kazanma olasılığı tüm olası değerler için iki ihalede de eşit olsun,

$Q_i^A(.) = Q_i^B(.)$. Böylece (8.3)'ten yola çıkarak herhangi bir değere sahip i teklif verenin beklenen karı her iki ihalede de eşit olacaktır, $\pi_i^A(v) = \pi_i^B(v)$. Teklif verene göre iki ihale de beklenen kar açısından denktir.

Örneğin $SPA(r,c), EA(r,c), \mathrm{FPA}(\mathrm{r,c}), DA(r,c)$'yi ele alalım. Her ihalede marjinal değer v_0 (8.7) ya da (4.5)'te görüldüğü gibi aynıdır ve (8.4)'te görüldüğü üzere kazanma olasılığı fonksiyonu aynıdır. Her bir ihalede, olası en düşük değere sahip teklif verenin karı sıfırdır, $\pi_i(0) = 0$. Dolayısıyla her teklif veren hangi değere sahip olursa olsun 4 ihaleyi de denk olarak görür.

Aynı zamanda beklenen kar açısından satıcı için de bu ihalelerin denk olduğunu ifade etmek çok şaşırtıcı olmayacaktır. Satıcının bir ihaleden beklenen karı (8.2) ve (8.3)'ü kullanarak $i = 1,...,n$ için $\pi_i(0)$ ve $Q_i(.)$ fonksiyonları açısından gösterilebilir. Dolayısıyla satıcı $\pi_i(0)$ ve $Q_i(.)$ fonksiyonları aynı olan tüm ihalelerden aynı beklenen karı elde eder.

Herhangi bir ihalede satıcının mal için değeri v_s iken beklenen karını $\pi_s(v_s)$ olarak gösterelim. Satıcının beklenen karının aşağıdaki denkleme eşit olduğunu gösterebiliriz.

$$\pi_s(v_s) = v_s + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^1 \left(v_i - \frac{1-F(v_i)}{F(v_i)} - v_s \right) Q_i(v_i) f(v_i) dv_i - \pi_i(0) \right\} \tag{8.9}$$

$\pi_s(v_s)$ tamamen $\pi_i(0)$ ve $Q_i(.)$ fonksiyonlarına bağlıdır. (8.9)'un ispatı aşağıdadır ve (8.2) ve (8.3)'e bağlıdır.

<u>**Teorem 8.2:**</u> Satıcının herhangi bir ihalede elde ettiği beklenen karı $\pi_i(0)$ ve $Q_i(.)$'a bağlıdır. [11]

Örnek: Üniform dağılım için (8.9) aşağıdaki gibidir:

$v_s = 0, r = 0, \pi(0) = 0$;

[11] İspatı için Riley ve Samuelson (1981)'e bakın.

$$\pi_s(v_s) = n\left[\int_{v_0}^{1}\left(v - \frac{1-F(v)}{f(v)}\right)F(v)^{n-1} f(v)dv\right] =$$

$$n\left[\int_{v_0}^{1}\left(v - \frac{1-v}{1}\right)(v)^{n-1} dv\right] = \frac{n-1}{n+1}$$

8.3. Optimal Muhammen Bedel ve Giriş Maliyeti:

Şimdi de birinci ve ikinci fiyat ihalelerinde satıcının optimal muhammen bedeli ve giriş maliyetini bulalım. Daha önce de görüldüğü gibi (r,c) seçimi yapılırsa (8.7)'deki $v_0(r,c)$ marjinal değeri bulunmuştu. Her bir teklif verenin denge kazanma olasılığı fonksiyonu (8.4)'te verilmiştir. Ve eğer teklif verenin değeri 0 ise, denge beklenen karı da 0 olur. Böylece $v_0 = v_0(r,c)$ dersek, satıcının her iki ihalede de beklenen geliri (8.9)'dan yola çıkarak şöyle olur:

$$\pi_s(v_s) = v_s + n\left[\int_{v_0}^{1}\left(v - \frac{1-F(v)}{f(v)} - v_s\right)F(v)^{n-1} f(v)dv - \right] \tag{8.10}$$

Satıcının (r,c) seçimi marjinal değeri etkilediği ölçüde kendi karını etkiler. Eğer (8.10)'u maksimum yapan v_0 marjinal değer v_0^* ise, $v_0(r,c) = v_0^*$'ı sağlayan herhangi bir (r,c) değeri optimaldir. Genellikle üzerinde çalışılan dağılımlarda aşağıdaki fonksiyon v arttıkça artar.

$$v - \frac{1-F(v)}{f(v)} - v_s \tag{8.11}$$

Bu durumda öyle bir v vardır ki (8.11) bundan küçük değerler için negatif, büyük değerler için pozitif olur. Dolayısıyla v_0 bu v değerine eşit olduğunda (8.10) maksimum olur çünkü bu durumda integralin aralığı tam olarak integralin içinin pozitif olduğu yerden başlar. Böylece aşağıdaki denklem v_0^*'ı tanımlar:

$$v_0^* - \frac{1-F(v_0^*)}{f(v_0^*)} - v_s = 0 \tag{8.12}$$

(8.13) v arttıkça artmasa bile optimal v_0 (8.12)'yi sağlamaktadır. Ama bu durumda (8.12) birden fazla çözüme sahiptir ve sadece bunlardan bazıları satıcının karını maksimum yapar.

Burada bir şeye dikkat edilmesinde fayda görülmektedir. Optimal marjinal değer teklif veren sayısına bağlı değildir. Dolayısıyla (r^*, c^*) optimal muhammen bedel ve giriş maliyeti bileşeni de teklif veren sayısına bağlı değildir.

Sonuç

Bu makalede ihaleler üzerine teorik bir araştırma yapılmıştır. Dört standart ihalenin dengeleri araştırıldığında belirli varsayımlar altında ihaleye girenlerin stratejileri farklı olsa da her bir ihalenin satıcıya sağladığı beklenen gelirin eşit olduğu örneklerle gösterilmiştir. Satıcının beklenen karını maksimum yapan optimal muhammen bedeli ve giriş maliyeti gösterilmiştir. Ve görülmüştür ki optimal muhammen bedel ve giriş maliyeti ihaleye giren teklif veren sayısına bağlı değildir.

Abstract: In this paper I will analyze theoretical work on auctions. After giving some assumptions and the model I will analyze the types of auctions in theory. There two oral auctions and two sealed-bid auctions. Both type of oral auctions, English and Dutch, and first-price sealed-bid auctions are used in practice but the second-price sealed-bid auctions are used in theory. In this study, I will examine the equilibrium of all these types of auctions and give some examples where these auctions are used.
Keywords: Auction, Bid, Equilibrium, Sealed-Bid, Revenue Equivalance Theorem

Kaynakça

Ashenfelter, O. (1989), "How Auctions Work for Wine and Art," *Journal of Economic Perspectives,* 3, 23-36.

Cramton, P., *Gibbons* ,R. ve P. D. *Klemperer* (1987), "Dissolving a Partnership Efficiently," *Econometrica,* 55, 615-632.

Graham, D. ve R. C. *Marshall* (1987), "Collusive Bidder Behavior at Single Object Second-Price and English Auctions," *Journal of Political Economy*, 95, 1217-1239.

Hendricks, K. ve R. H. *Porter* (1989), "Collusion in Auctions," *Annales d'Economic et de Statisque,* 15/16, 217-230.

Ingraham, A. (2000), "Testing for Cheating Between Bidders and Auctioneers in Sealed-Bid Auctions," *Working paper,* University of Maryland, College Park.

Maskin, E. ve J.G. *Riley* (1984), "Optimal Auctions with Risk Averse Buyers," *Econometrica,* 52, 1473-1518.

Matthews, S. (1984), "Information acquisition in discriminatory auctions," *in Bayesian Models in Economic Theory, ed. M. Boyer and R. Kihlstrom, Elsevier Science Pub.,* 181-207.

Milgrom, P. R. ve R. J. *Weber* (1982), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding," *Econometrica,* 49, 1089-1122.

Myerson, R. (1981), "Optimal Auction Design," *Mathematics of Operations Research,* 6, 58-73.

Riley, J. G. ve W. F. *Samuelson* (1981), "Optimal Auctions," *American Economic Review,* 71, 381-392.

Rothkopf, M., *Teisberg,* T. ve E. *Kahn* (1990), "Why are Vickrey Auctions rare?" *Journal of Political Economy,* 98, 94-109

Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders," *Journal of Finance,* 16, 8-37.