Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Cilt: 11, Sayı:3, Yıl: 2009, Sayfa: 75-96
ISSN: 1302-3284

MARKOV KARAR SÜRECİ İLE MODELLENEN STOKASTİK VE ÇOK AMAÇLI ÜRETİM/ENVANTER PROBLEMLERİNİN HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜLMESİ

Aslı ÖZDEMİR*

Özet

Geleceğe yönelik planlar yapılırken belirsizlik içeren kararların verilmesinde stokastik yaklaşımlardan biri olan markov karar süreçleri (MDP) yöneticilere destek sağlayabilmektedir. Kar maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu gibi tek bir amaç ele alındığında MDP'lerinin çözümünde değer iterasyonu, politika iterasyonu veya doğrusal programlama gibi yöntemler kullanılabilmektedir. Ancak, işletmelerin rekabet ortamında aldıkları kararlar, birden fazla ve çoğunlukla da birbiriyle çatışan amaçların eş zamanlı olarak ele alınmasını gerektirmektedir. Hedef programlama (GP) yaklaşımı bu tür sorunların çözümünde kullanılabilmektedir. Çalışmanın amacı, stokastik yapıdaki çok amaçlı karar problemlerinin çözümü için MDP ve GP yaklaşımlarının bir arada kullanıldığı bütünleşik bir bakış açısı ortaya koymaktır. Bu doğrultuda otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmenin üretim/envanter sistemi ele alınmıştır.

***Anahtar Kelimeler**: Markov Karar Süreci, Doğrusal Programlama, Hedef Programlama, Çok Amaçlı Markov Karar Süreci.*

SOLVING STOCHASTIC AND MULTI-OBJECTIVE PRODUCTION/INVENTORY PROBLEMS MODELED BY MARKOV DECISION PROCESS WITH GOAL PROGRAMMING APPROACH

Abstract

To make decisions involving uncertainty while making future plans, Markov Decision Process (MDP), one of the stochastic approaches, may provide assistance to managers. Methods such as value iteration, policy iteration or linear programming can be used in the solution of MDPs when only one objective such as profit maximization or cost minimization is considered. However the decisions made by business while operating in a competition environment require considering multiple and usually conflicting objectives simultaneously. Goal programming (GP), can be used to solve such problems. The aim of this study is to provide an integrated perspective involving the utilization of MDP and GP approaches together for the solution of stochastic multi-objective decision problems. To this end the production/inventory system of a business operating in the automotive supplier industry is considered.

***Keywords:** Markov Decision Process, Linear Programming, Goal Programming, Multi Objective Markov Decision Process.*

* DEÜ İİBF İşletme Bölümü Arş. Gör. Dr., asli.yuksek@deu.edu.tr

1. GİRİŞ

Stokastik ve çok amaçlı bir üretim/envanter problemini ele alan çalışmanın amacı; otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren bir işletmede gerçekleştirilen uygulama ile bu tür bir karar problemini Markov karar süreci (MDP) ile modellemektir. Böylece birden fazla amacın yer aldığı MDP' ni çok amaçlı karar verme yaklaşımlarından hedef programlama (GP) ile çözmek ve bu doğrultuda stokastik ve çok amaçlı karar verme yaklaşımlarının bir arada kullanıldığı bir yaklaşım ortaya koymak mümkün olacaktır.

Kesikli $\{X_t, t = 0,1,2,...\}$ veya sürekli $\{X_t, t \geq 0\}$ bir stokastik süreç, n zaman periyodlar kümesi $t_1 < t_2 < \cdots t_n$ için, sürecin hangi durumda olacağına ilişkin koşullu olasılığın sadece bir önceki periyottaki değere bağlı olması halinde Markov karar süreci (MDP) olarak adlandırılmaktadır. Diğer bir ifadeyle, sürecin şu anki durumu bilindiğinde gelecek, geçmiş durumlardan bağımsız olmaktadır (Parzen, 1962: 188).

MDP genel anlamıyla, durumlar kümesini ve her durumda seçilebilir hareketleri içeren bir sistemden oluşmaktadır. MDP' nin düzeni aşağıdaki biçimde özetlenebilmektedir (Ching ve Ng, 2006: 34);

(i) Belirli bir periyotta MDP' nin belirli bir durumu (*i)* gözlemlenmektedir. (Sürecin durum uzayı *S* ile gösterildiğinde, $i \in S$)

(ii) Durumun gözlemlenmesinden sonra, bu duruma ilişkin olası kararlar kümesinden (A_i) bir hareket (*k*) seçilmektedir. Her *i* durumunda seçilebilecek hareketlere ilişkin kümelerin (A_i) birleşimi sürecin hareket uzayını (*A*) oluşturmaktadır.

(iii) Mevcut duruma ve seçilen harekete bağlı olarak bir anlık ödül (getiri veya kayıp) (r_{ij}^k) ortaya çıkmaktadır. r_{ij}^k, *k* alternatifinin seçilmesi halinde *i* durumundan *j* durumunda geçişle elde edilen ödülü göstermektedir.

(iv) Geçiş olasılıkları (p_{ij}^k) da seçilen hareketten etkilenmektedir. p_{ij}^k, *i* durumunda iken *k* hareketinin seçilmesiyle sistemin *j* durumuna geçiş yapma olasılığını ifade etmektedir.

(v) Zaman parametresi arttıkça yani zaman ilerledikçe, geçişler tekrar ortaya çıkmakta ve yukarıdaki basamaklar tekrarlanmaktadır.

Periyot, durum, hareket, geçiş olasılıkları ve ödül öğelerinin birleşimi $\{T, S, A_i, p_{ij}^k, r_{ij}^k\}$ bir Markov karar sürecini oluşturmaktadır.

2. MARKOV KARAR SÜREÇLERİ VE İŞLETME SORUNLARININ ÇÖZÜMÜNDE KULLANILMASI

MDP' lerde politikaların karşılaştırılması için karar vericinin performans ölçütünü belirlemesi gerekmektedir. Bu ölçüt kazanç (ya da kayıp) değerlerini içeren bir ödül kriteridir. MDP' lerde kullanılan üç ödül kriteri; beklenen toplam ödül, beklenen toplam indirgenmiş ödül ve beklenen ortalama ödül kriterleridir.

Kararlar sık sık verildiğinde (örneğin yıllık değil de aylık periyotlar söz konusu olduğunda *(1/1+i)* ile ifade edilen indirgeme faktörü 1'e yakın olduğundan) veya performans kriteri ekonomik terimlerle kolaylıkla ifade edilemediğinde, karar verici, politikaları, beklenen toplam indirgenmiş ödüllerine göre değil beklenen ortalama ödüllerine göre kıyaslamayı tercih edebilir. Özellikle, kuyruk kontrolü teorisinde, ve özellikle de iletişim ağları ve bilgisayar sistemlerinin kontrolüne uygulandığında, ve sıkça yeniden sipariş kararlarının verildiği envanter sistemlerinde beklenen ortalama ödül kriteri kullanılmaktadır (Puterman, 1994: 331). Ayrıca ele alınan sistemden elde edilecek beklenen toplam ödül, n arttıkça artmakta ve beklenen toplam ödül kriteri ile sistemin uzun dönemli seyri hakkında bir bilgiye ulaşılamamaktadır. Bu durumda beklenen ortalama ödül kriterinin kullanılması karar vericiye hem sistemin uzun dönemli seyri konusunda bilgi hem de farklı MDP' lerin ortalama getirilerini karşılaştırma fırsatı vermektedir. Belirli bir politikanın beklenen ortalama ödülü, sürecin bu politika ile sonsuz denebilecek kadar uzun bir zaman boyunca devam ettirilmesi ile birim zamanda kazanılan beklenen ortalama ödüldür.

Hareket seçimine ilişkin kararlar, karar dönemleri olarak adlandırılan zaman içindeki belirli noktalarda verilmektedir. Negatif olmayan reel sayılardan oluşan karar dönemleri kümesi (T) kesikli küme veya süreklilik ve sonlu veya sonsuz küme olmak üzere iki biçimde sınıflandırılabilmektedir. Kesikli olması durumunda kararlar tüm karar dönemlerinde verilmektedir (Puterman, 1994: 17). Karar dönemlerinin kümesi $T = \{1,2,\ldots,N\}$ için N sonlu veya sayılabilecek kadar sonsuz olduğunda karar problemi sonlu zamanlı, diğer durumda ise sonsuz zamanlı problem olarak nitelendirilmektedir (Puterman, 1994: 18).

Karar vericinin hareket seçiminde tercih ettiği bir karar kuralı, belirli bir karar döneminde her bir durum için hareketin seçilmesine yönelik prosedürü belirtmektedir. Karar kuralları deterministik Markovian' dan rassal geçmişe bağlı karar kurallarına doğru değişmektedir. Karar kuralları geçmiş verilere bağlılık derecesine ve hareket seçim yöntemine bağlı olarak; geçmişe bağlı ve rassal (HR), geçmişe bağlı ve deterministik (HD), Markovian ve rassal (MR) veya Markovian ve deterministik (MD) olarak dört sınıfa ayrılmaktadır. Çalışmada deterministik Markovian karar kuralları ele alınmaktadır. Karar kuralı sistemin geçmiş durum ve hareketlere sadece sistemin mevcut durumu aracılığıyla bağlı olması nedeniyle Markovian (hafızasız) ve kesinlikle bir hareketin seçilmesi nedeniyle deterministik olarak nitelendirilmektedir (Puterman, 1994: 21). Politika, süreç boyunca alınması gereken tüm kararları tanımlar (Ching ve Ng, 2006: 34). Politika, sayılabilir karar vektörleri dizisidir. Eğer her zaman periyodu için bu karar vektörleri aynı ise diğer bir ifadeyle politika içinde bulunulan periyottan bağımsız ise bu durumda politika durağan politika olarak adlandırılmaktadır. Her *i* durumu için, sıfırdan faklı bir olasılıkla bir politika seçilebiliyorsa, rassal olmayan (veya arı) politika iken aksi halde rassal politikadır (Nazareth ve Kulkarni, 1986: 14).

Bellman'ın 1957 yılında yayınlamış olduğu *"Dinamik Programlama"* isimli kitapla sıralı karar problemlerinin çözümünde kullanılan dinamik programlama yaklaşımı ortaya konmuştur. Bu yaklaşımın ardından sonraki yıllarda (1961, 1962, 1965) Bellman konuya ilişkin pek çok kitap yayınlamıştır. 1960 yılında Howard yayınladığı *"Dinamik Programlama ve Markov Süreçleri"* isimli kitabı ile dinamik programlama ve matematiksel Markov zinciri kavramını bütünleştirme fikriyle birlikte *Markov Karar Süreçleri* terimini ortaya koymuştur (http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf). Sonraki yıllardan başlamak üzere yapılan çalışmalarda MDP'lerin pazarlama, işgücü planlaması, üretim planlaması ve kontrolü, kaynak dağıtımı, finansman ve yatırım kararları başta olmak üzere işletmelerin pek çok kararında uygulandığı görülmüştür.

Sonlu MDP'lerde dinamik programlama (DP) yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayalı olarak geliştirilmiş olan değer iterasyonu yöntemi kullanılabilirken, sonsuz zamanlı süreçlerin optimizasyonunda politika iterasyonu yönteminden ve doğrusal programlama yaklaşımından yararlanılabilmektedir. İşletme sorunları çoğunlukla sonlu periyoda sahip olmayan kararları içerdiğinden bu tür süreçlerin optimizasyonunda politika iterasyonu yöntemi kullanılabilmektedir.

Politika iterasyonu yöntemi, kesikli dinamik programlama problemlerinin çözümü için en hızlı hesaplama yöntemlerinden biridir fakat yöntemin performansı problemin büyüklüğüyle hızla düşer. Bu düşüşün nedeni, yöntemin, her iterasyonda politika değerlendirme aşamasında doğrusal eşitlikler setinin çözümünü gerektirmesidir (Mrkaic, 2002: 518).

3. MARKOV KARAR SÜRECİ İLE ELE ALINAN SORUNLARIN DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI İLE MODELLENMESİ

MDP olarak formüle edilen problemlerin optimizasyonunda kullanılan çözüm yöntemleri DP'nin yinelemeli ilişkisinden faydalanarak optimizasyon sağlamaktadır. Bunun yanında MDP problemlerinin optimizasyonunda işletme sorunlarında geniş uygulama alanına sahip bir optimizasyon tekniği olan Doğrusal Programlama'dan (LP) da faydalanılabilmektedir. Çok sayıda zaman periyoduna ve duruma sahip sorunların çözümünde MDP çözüm algoritmaları yetersiz kalabilmekte ve ayrıca LP çeşitli doğrusal sistem kısıtlarının da probleme dahil edilmesini sağlamaktadır.

MDP'nin işletmelerdeki çeşitli alanlardaki uygulamalarına yönelik olarak literatürde yer alan çalışmaların yanı sıra 1950'li yıllardan başlamak ve çoğu üretim/envanter ve makine teçhizatın kalite kontrolü bakım-onarım ve yenilenmesi kararlarına yönelik olmak üzere işletme sorunlarının ele alındığı çeşitli çalışmalarda (Manne, 1960; Klein, 1962; Wolfe ve Dantzig, 1962; D'epenoux, 1963; Derman ve Klein, 1965; Klein, 1966; Kolesar, 1967; Ghellinck ve Epen, 1967; Kislev ve Amiad, 1968; Denardo, 1970; Hinomoto, 1971a; Hinomoto, 1971b; Hordijk ve Kallenberg, 1979; Nazareth ve Kulkarni, 1986; Yates ve Rehman, 1998; Berman ve Sapna, 2001; Jayakumar ve Asgarpoor, 2006), MDP'lerin çözümünde LP'nin bir optimizasyon tekniği olarak kullanılabileceği ortaya konmuştur. Üretim/envanter sorunlarının ele alındığı çalışmalardan Manne'nin (1960) çalışmasında denge durumu olasılıkları ile beklenen ortalama üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetini minimize etmeyi amaçlayan LP modeli oluşturularak optimal üretim ve stok miktarları belirlenmiştir. Aynı ödül yapısının kullanıldığı Klein (1966)'in çalışmasında farklı olarak ıskarta payı (sipariş aksamalarını önleme amaçlı üretim fazlalığı) da modele dahil edilmektedir. D'epenoux (1963), tek ürünlü bir üretim/envanter sistemini MDP ile modellemiş ve sürecin çözümü için toplam indirgenmiş maliyeti (üretim ve stoklama maliyetleri) minimize eden bir LP formülasyonu ortaya koymuştur.

Literatürdeki bu çalışmalar incelendiğinde MDP' lerin doğrusal programlama formülasyonunda, beklenen ortalama ödül ve beklenen toplam indirgenmiş ödül kriterlerinin performans ölçütü olarak kullanıldığı görülmüştür. N-durumlu, tamamıyla ergodik bir Markov süreci için sistem zaman içinde geçiş yaptıkça sistemin beklenen toplam kazancı da artmaktadır. Bu durumda sürecin ortalama getirisi daha anlamlı bir performans ölçütü olabilmektedir. Ergodik olma özelliği ile denge durumuna ulaşabilen sürecin beklenen ortalama getirisinin hesaplanmasında sürecin denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır. İşletmelerin de çok kısa sürede faaliyetlerini sona erdirmemesi ve bu doğrultuda planlama periyodunun sonsuz olması nedeni ile bu tür karar problemlerinde hem sürecin uzun dönemli seyrini ortaya koymak hem de performansını değerlendirmek için beklenen ortalama ödül kriterinin kullanılması daha uygun olmaktadır. Bu doğrultuda çalışmada beklenen ortalama ödül kriteri kullanılmaktadır. Sonlu durum uzayına sahip ve kesikli zamanlı olan bir MDP için oluşturulan LP modeli aşağıda gösterilmektedir.

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k x_i^k \quad \text{veya} \quad Z_{\min} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k x_i^k$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ için})$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_j^k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 1,2,\ldots,N \text{ için}) \tag{1}$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,N \text{ ve } k = 1,2,\ldots,K \text{ için})$$

Denge durumu olasılıklarından oluşan denge durumu vektörü Π ve $i \in S$ için denge durumuna ulaşıldığında sürecin i durumunda olma olasılığı Π_i ile gösterildiğinde, denge durumunda sürecin i durumunda olması ve seçilen hareketin

k olması olasılığı x_i^k, ($i \in S$ ve $k \in A_i$), LP modelinin karar değişkenidir ve $\Pi_i = \sum_{k=1}^{K} x_i^k$ 'dır. i durumunda k alternatifini kullanmanın beklenen ödülü, bu alternatifin kullanımıyla bir sonraki geçişten beklenen ödül, q_i^k ile gösterilmekte ve $q_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$ ile hesaplanmaktadır. Beklenen ödül, kazanç olması durumunda w_i^k ve maliyet olması durumunda c_i^k ile gösterilecektir. Amaç, sürecin beklenen ortalama kazancını maksimize etmek ya da beklenen ortalama maliyetini minimize etmektir ve bu beklenen değerlerin hesaplanmasında da denge durumu olasılıkları kullanılmaktadır. LP modelinde yer alan kısıtlardan ilki, denge durumu vektöründe yer alan Π_i değerlerinin toplamının 1 olması ($i = 1,2,\ldots,N$ için $\sum_{i=1}^{N} \Pi_i = 1$) koşuludur. LP modelinin diğer kısıtları ise denge durumuna ilişkin kısıtlardır. Geçiş olasılıkları matrisi, çok sayıda geçiş yapılması sonucunda yani bu matrisin çok sayıda kuvvetinin alınmasıyla, satırları aynı olan bir vektöre dönüşmektedir yani $n \to \infty$ gittikçe $P^n \to \Pi$. Sürecin bu denge durumu koşulları ile $\Pi_j = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i p_{ij}$ olduğundan LP modelinin diğer kısıtları sistemin bu sınırlayıcı özelliğine ilişkindir. Son olarak karar değişkenlerinin pozitiflik koşulu diğer bir ifadeyle denge durumu olasılıklarının negatif olmaması koşulu ($\Pi_i \geq 0$) da modele eklenmektedir.

MDP ile ele alınan çeşitli karar sorunlarının modellenmesinde LP yaklaşımını kullanmanın avantajlarına karşın, işletmelerin karşılaştıkları sorunlar birbiriyle çatışan birden fazla amacın eşzamanlı olarak ele alınmasını gerektirmektedir. Bu doğrultuda işletmelerin belirsizlik içeren çok amaçlı karar verme ortamında etkin kararlar verebilmeleri hem stokastik yöntemleri hem de çok amaçlı karar verme yaklaşımlarını bir arada kullanmalarını gerektirmektedir. Çok amaçlı karar verme yaklaşımlarından biri olan Hedef Programlama (GP) birden fazla amacın eş zamanlı olarak ele alınmasını sağlamasının yanı sıra öncelikli yapıdaki GP modelleriyle karar vericilerin farklı öncelik tercihlerinin modele dahil edilmesini ve farklı öncelik düzeylerinde karşılaştırılmalı analiz yapılmasını da sağlamaktadır. Bu doğrultuda LP yaklaşımına kıyasla daha yüksek düzeyde esneklik sağlayarak karar vericilerin tercihlerinin de modele dahil edilmesine olanak vermektedir.

GP' de temel düşünce, her amaç için spesifik hedeflerin belirlenmesi, her amaç için bir amaç fonksiyonunun formüle edilmesi ve bu amaç fonksiyonlarının hedeflerinden sapmalarının toplamını minimize eden bir çözüm aranmasıdır (Vanguri, 1998: 12). GP modelinde yer alan sapma değişkenleri, her hedef değerinden negatif ve pozitif sapmalar olarak ele alınmaktadır. Bu doğrultuda amaç fonksiyonu, hedeflere atanan göreli önem ya da öncelik düzeyleri doğrultusunda hedeflerden sapmaların toplamını minimize etmektir. Birden fazla amacın yer aldığı problemlerin çözümünde LP yaklaşımının kullanılmasına karar verilmesi durumunda, amaç fonksiyonu dışındaki diğer amaçları kısıt olarak ele almak gerekmekte ve LP modeli optimal çözümün tüm kısıtların sağlamasını zorunlu kılmaktadır (Lee ve Moore, 1975: 198-199). Kısıtların sağlanamaması durumunda olursuz çözüm ortaya çıkmaktadır. GP yaklaşımı da ilk olarak, Charnes ve Cooper tarafından, LP modellerindeki bu olursuz çözümleri ele almak üzere ortaya konmuştur.

Charnes vd. (1955) tarafından geliştirilen biçimiyle GP'nin temelindeki düşünce, eş zamanlı olarak elde edilemeyecek hedefler setine "mümkün olabildiğince yakın" olabilecek çözümler geliştirmektir (Perez, 1985: 16). Daha kesin ve açık bir tanım ise hedef programlama kavramının ilk kez kullanıldığı Charnes ve Cooper'ın 1961'de yayınlanan "*Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*" isimli eserinde yer almıştır (Tamiz, Jones ve Romero, 1998: 569). Ijiri (1965) başlangıçtaki bu fikirleri geliştirerek öncelikli GP modelini (Perez, 1985: 18) geliştirmiştir. Sonraki yıllarda Lee (1972), Ignizio (1976), Arthur ve Ravindran (1978), Schniederjans ve Kwak (1982), Ignizio (1982, 1985), ve Olson (1984)'un çalışmalarında farklı GP modelleri ve simpleks algoritmaları ortaya konmuştur (Arthur ve Ravindran, 1978: 867-868; Olson, 1984: 348; Tamiz ve Jones, 1996: 198). Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde GP modellerinin, işgücü planlaması, pazarlama kararları, ulaştırma ve lojistik kararları, sistem tasarımı, portföy seçimi vb. finansman ve muhasebe kararları, üretim planlaması ve çizelgelemesi, envanter kontrolü, kalite kontrol ve performans değerlendirme gibi çeşitli işletme kararlarında uygulandığı (Ignizio, 1978: 1112; Lee, 1979: 2; Lee ve Moore, 1975: 228-229; Ravindran, Phillips ve Solberg, 1987: 206) görülmektedir.

Çalışmanın amacı doğrultusunda MDP problemlerinin GP ile modellendiği çalışmalar incelendiğinde bu yaklaşımın işgücü planlaması ve PERT ağlarında uygulandığı görülmektedir. Georgiou (1999), çalışmasında işgücü planlaması sorununu homojen olmayan (geçiş olasılıklarının zamana bağlı olduğu) kesikli zamanlı MDP ile modelleyerek hiyerarşik bir popülasyon yapısı içinde yer alan çalışanları çeşitli niteliklerine göre *k* sınıfa ayırmıştır. Sınıflar yani MDP' nin durumları arasındaki geçişlere ilişkin olasılıklar belirlenmiştir. Sorunda, her durum için maliyet minimizasyonu ve işe alım politikasına bağlı olarak istenen işgücü yapısıyla ilgili olmak üzere birden fazla amaç yer almaktadır. Sürecin sınırlayıcı davranışından faydalanarak, bu amaçların ele alınabilmesi için ağırlıklandırılmış ve öncelikli GP kullanarak bu yaklaşımı bir üniversitenin işgücü planlaması sorununa (4 durumlu bir markov süreci) uygulamıştır. Georgiou ve Tsantas (2002), Georgiou (1999)' nun yaptığı çalışmaya ek olarak, *k* hiyerarşik sınıfa ilaveten, işe alımlarda işgücü stoku gibi hizmet verecek yeni bir eğitim/yedek sınıfı oluşturmuş ve MDP modelini GP yaklaşımı ile çözmüştür. Azaron, Katagiri ve Sakawa (2007), Markov PERT ağlarındaki zaman-maliyet dengesi problemleri için çok amaçlı bir optimal kontrol problemi ortaya koymuştur. Görev sürelerinin Erlang dağılımlı birbirinden bağımsız rassal değişkenler olduğu varsayımı altında, problemde, projenin toplam direkt maliyetlerinin minimizasyonu, proje tamamlanma süresinin ortalamasının minimizasyonu ve proje tamamlanma süresinin varyansının minimizasyonu olmak üzere üç amaç ele alınmaktadır. Doğrusal olmayan optimizasyon problemine dönüştürülen problemin çözümü için GP yaklaşımı kullanılmıştır. Ele alınan çalışmalar dışında, literatürde, GP yapısı içinde MDP' lerin yer aldığı çalışmalara da rastlanmıştır. İşgücü planlamasında uygulanan bu çalışmalardan birinde Zanakis ve Maret (1981), MDP-öncelikli GP ardışık yaklaşımı ortaya koymuştur. Çalışanların bölümler arası transferi, işten ayrılmaları gibi çeşitli durumlar MDP ile modellenerek geçiş olasılıkları matrisi oluşturulmuş, bu olasılıklar ve maliyetler ile beklenen yıllık maliyet matrisi hesaplanarak, belirlenen 12 hedeften biri olan maliyeti minimize etme hedefinin oluşturulmasında bu maliyetler kullanılmış ve öncelikli doğrusal GP modeli çözülmüştür. Bir diğer çalışmada Kornbluth (1981), Zanakis ve Maret'in (1981) ortaya koyduğu sorunun aynısını öncelikli GP modeli yerine ağırlıklandırılmış amaç fonksiyonu ile çözmüştür. Kalu' nun 1994 ve 1999 yıllarındaki çalışmalarında ise GP modelindeki parametrelerin (kategoriler arasında geçiş yapan personel oranlarının) tahminlenmesinde MDP' den faydalanılmıştır.

Literatürde yer alan çalışmalarda yer alan LP ve GP modelleri temel alınarak işletmelerin üretim/envanter kontrolü problemleri için, LP formülasyonunda yer alan beklenen ortalama ödül kriteri (Manne, 1960; Wolfe ve Dantzig 1962; D'epenoux 1963; Klein, 1966; Nazareth ve Kulkarni, 1986) kullanılarak öncelikli GP modeli (Jaaskelainen, 1969; Lee ve Moore, 1975; Golany, Yadin ve Learner, 1991; Perez, 1985) oluşturulmuştur.

$$
\begin{aligned}
& Z_{\min} = \Pr_w(d_w^- + d_w^+) + \Pr_c(d_c^- + d_c^+) + \Pr_s(d_s^- + d_s^+) \\
& \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} w_i^k x_i^k - d_w^+ + d_w^- = b_w \\
& \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} c_i^k x_i^k - d_c^+ + d_c^- = b_c \\
& \sum_{k=1}^{N} x_0^k - d_s^+ + d_s^- = b_s \\
& \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k = 1 \\
& \sum_{k=1}^{K} x_j^k = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_i^k p_{ij}^k \qquad j = 0,1,\ldots,N \text{ için.} \\
& x_i^k, d_w^+, d_w^-, d_c^+, d_c^-, d_s^+, d_s^- \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Modelde yer alan 1.hedef kısıtı kazanç hedefini (b_w), 2. hedef kısıtı üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinden oluşan maliyet hedefini (b_c) ve son olarak 3. hedef kısıtı da stoksuzluk riskine ilişkin hedefi (b_s) ifade ederken, diğer kısıtlar LP formülasyonunda tanımlanan ve MDP' nin olasılık yapısına ilişkin olan kısıtlardır. GP modelinde yer alan karar değişkenleri denge durumu olasılıklarını ve parametreler de geçiş olasılıkları ve ödüllerle hesaplanan kazanç ve maliyet değerlerini göstermektedir. Bu doğrultuda modelde yer alan karar değişkenleri ve parametreler MDP yaklaşımının uzantısıdır.

4. STOKASTİK ENVANTER PROBLEMİNİN GP İLE ÇÖZÜMÜNE YÖNELİK BİR UYGULAMA

Verilen GP modeli doğrultusunda çalışmanın bu bölümünde gerçek işletme verileri ile uygulama yapılmaktadır.

4.1. Araştırma Problemi ve Probleme İlişkin Veriler

Önceki bölümlerde teorik çerçevesi ortaya konan MDP ve GP yaklaşımlarını bir arada kullanarak ortaya konan modelin gerçek işletme verileri ile uygulanabilirliğini göstermek üzere otomotiv yan sanayinde faaliyet gösteren büyük ölçekli bir işletmenin verileri ele alınmıştır. Uygulamanın gerçekleştirilmesi için gerekli veriler firmanın kalite ve planlama departmanlarının yöneticileri ile yüz yüze görüşmeler yapılarak ve üretim süreci gözlemlenerek toplanmıştır. Yapılan görüşmeler doğrultusunda işletmenin rekabet avantajına zarar vermemek için işletme ismine çalışmada yer verilmemektedir. İşletme, yirmi yılı aşkın süredir otomotiv yan sanayinde faaliyet göstermekte, global pazarlarda faaliyet gösteren pek çok işletmenin de yan sanayisi olma özelliği taşımakta ve üretiminin yaklaşık %75'ini çeşitli ülkelerdeki otomotiv işletmelerine ihraç etmektedir. İki üretim tesisinde üç vardiyalı çalışma sistemiyle yıllık toplam, yaklaşık 4 milyon adetlik üretim kapasitesine sahip işletme 400 'den fazla farklı modelde ürün üretmekte ve yaklaşık 1000 kişi istihdam etmektedir. Üretimde CAD/CAM teknolojileri kullanılmaktadır. Tam zamanında üretime geçme amacı doğrultusunda üretim sürecinde hataların önlenmesi ve stokların minimizasyonu hedeflenmektedir.

Çalışmada yıllık üretim kapasitesinin %10'luk bölümüne sahip ürün modeli ele alınmaktadır. Bu doğrultuda tek ürünlü bir üretim/envanter sistemi modellenecektir. Ürüne ilişkin veriler aşağıda özetlenmektedir.

- *Üretim Miktarı (Parti Büyüklüğü):* Üretim sürecinde parti büyüklüğü 1500 adettir. Ürünlerin 1500 adetlik partiler halinde üretilmesi doğrultusunda satışlar ve stoklar için de parti büyüklüğü esas alınmakta diğer bir ifadeyle ürünlerin partiler halinde satıldığı ve stoklandığı varsayılmaktadır.
- *Üretim Kapasitesi: :* Ürünün aylık üretim kapasitesi 30 000 adet = 20 partidir.
- *Satış Miktarı:* Ürünün yıllık (2006 yılı) satış miktarı 260 000 adettir.
- *Stoklama Kapasitesi:* Ürün için aylık stoklama kapasitesi 3000 adet = 2 partidir.
- *Fiyat ve Maliyet Verileri:* Ürünün satış fiyatı 70 TL, birim üretim maliyeti 31.5 TL, stoklama maliyeti 17.5 TL ve stoksuzluk maliyeti 14 TL'dir. Belirtilen varsayım doğrultusunda 1500 adetlik bir parti ürün için fiyat 105 TL ($\times 1000$) ve maliyetler de sırasıyla 47.25 TL, 26.25 TL ve 21 TL ($\times 1000$)'dir.

Ürüne ilişkin yıllık talep verisi (260 000 adet) kullanılarak ve işletme yöneticileri ile görüşmeler doğrultusunda oluşturulan aylık talep verileri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Aylık Talep Verisi

y	Talep (adet)	Talep (parti sayısı)	y	Talep (adet)	Talep (parti sayısı)
	26261	18		25653	17
	14442	10		16959	11
	23975	16		22525	15
	19609	13	0	19992	13
	26510	18	1	18271	12
	21047	14	2	24757	17

İşletmenin planlama departmanı, çok sayıda büyük otomotiv işletmesi ile devam eden sözleşmelerinin olması nedeniyle talepte mevsimsel dalgalanmaların yaşanmadığını belirtmiştir. Tabloda yer alan aylık talep verisinin, SPSS' de yapılan Tek-Örneklem Kolmogorov-Smirnov testi sonucunda $\lambda = 21666.75\,\text{adet} \approx 15$ parti ile Poisson dağılıma uyduğu belirlenmiştir. Tablodaki parti sayıları kesikli değerler alınarak hesaplanmıştır.

4.2. Markov Karar Sürecinin Bileşenleri

İşletmenin üretim/envanter sistemindeki değişmelerin çoğunlukla mevcut dönemdeki duruma göre verilmesi nedeniyle ve literatürde bu alanda yapılan çalışmaların da bu varsayımı desteklemesi doğrultusunda, envanter miktarlarına bağlı olarak verilecek üretim kararı problemi MDP ile modellenmektedir. Bu doğrultuda MDP ve bileşenleri belirlenmelidir.

- *Stokastik Süreç ve Sürecin Durumları:* İşletmenin üretim/envanter sistemi ve envanter miktarlarındaki değişmeler MPD ile ortaya konulduğundan dönem başı envanter miktarları MDP' nin durumları olarak nitelendirilmektedir.

- *Karar Dönemleri ve Periyotlar:* Ele alınan işletmenin üretim sürecinde kararlar, her dönemin başında (kesikli zamanlarda), envanter miktarına bağlı olarak o dönemde ne kadar üretim yapılacağının belirlenmesine yönelik olduğundan ele alınan MDP kesikli bir süreçtir. MDP' nin periyodu, gözlemin yapılarak kararın verildiği zaman birimi, 1 aydır. İşletmenin varlığının kısa bir süre faaliyet gösterdikten sonra son bulmaması nedeniyle karar dönemleri kümesi *T={0,1,2,…,n,…}*, sonsuz olarak nitelendirilmektedir.

- *Durum Uzayı:* İşletmenin ele alınan ürüne ilişkin aylık stoklama kapasitesi 2 parti olduğundan olası durumların kümesi yani sürecin durum uzayı $S = \{0,1,2\}$ olarak tanımlanmaktadır.

- *Hareket Kümeleri:* Her durum için belirlenen hareket alternatifleri aşağıdaki biçimde tanımlanabilir:

• Dönem başı envanter miktarı 0 olduğunda (*i=0* için), Tablo 1'de yer alan aylık talep verilerindeki minimum talep miktarına göre işletmenin en az 10 parti üretim yapması gerektiği söylenebilir. İşletmenin ürüne ilişkin aylık üretim kapasitesi 20 partidir. Ürün için aylık stoklama kapasitesinin 2 parti olması göz önünde bulundurulduğunda, işletme, 0 stokla döneme başlaması halinde 20 parti üretim gerçekleştirerek olası maksimum talebi (18 parti) karşılaması sonucunda 2 parti stokla dönem sonuna gelmektedir. Diğer bir ifadeyle işletme 0 stokla döneme başladığında üretim miktarını 20 partiye kadar çıkarabilmektedir. Bu nedenle *i=0* için hareket alternatifleri kümesi $A_0 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile tanımlanmakta ve *k=1* alternatifi 10, *k=2* alternatifi 11 ve *k*=11 alternatifi de 20 parti üretimi ifade etmektedir.

• Minimum maksimum talep miktarları ile ürüne ilişkin üretim ve stoklama kapasiteleri doğrultusunda; hareket alternatifleri kümesi, *i=1* için $A_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile ve *i=2* için ise $A_2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ile tanımlanmaktadır. MDP' nin hareket uzayının 33 elemanı vardır.

▪ *Geçiş Olasılıkları ve Ödüller:* Her durum için farklı hareket alternatiflerine göre geçiş olasılıkları ve ödüller (kazanç ve maliyet değerleri) hesaplanmalıdır. Ele alınan sorunda; hareket alternatiflerine göre durumlar arası geçişe ilişkin beklenen üretim maliyeti u_{ij}^k, stoklama maliyeti h_{ij}^k, stoksuzluk maliyeti l_{ij}^k ve toplam maliyet $c_{ij}^k = u_{ij}^k + h_{ij}^k + l_{ij}^k$ ile kazanç ise daha önce de belirtildiği gibi w_{ij}^k ile gösterilmektedir. Durum *i*' nin *k* alternatifi seçilmesi ile beklenen maliyeti $c_i^k = \sum_{j=0}^{2} c_{ij}^k$ ve kazancı $w_i^k = \sum_{j=0}^{2} w_{ij}^k$ olarak tanımlanmıştır.

Talep verilerinin Poisson dağılıma uyması doğrultusunda $\lambda = 15$ için Poisson olasılık değerlerini kullanarak, her durum için farklı alternatiflere göre geçiş olasılıklarının ve geçişlerle ortaya çıkan ödüllerin hesaplanması aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

• Dönem başı envanteri 0 parti (*i=0*) olduğunda ve karar verici *k=1* (10 parti üretim) alternatifini seçtiğinde, işletmenin bir sonraki döneme 0 stokla (*j=0*) başlaması, bu dönemde ürüne olan talebin 10 parti ya da daha fazla olması sonucunda gerçekleşebilir. Talebin 10 ya da daha fazla olması olasılığı $p_{00}^1 = 0.9301$ olarak bulunmaktadır. *i=0*, *j=0,1,2* ve *k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11* ($k \in A_0$) için benzer şekilde geçiş olasılıkları hesaplanmıştır.

• *i=0* iken ve karar verici *k=1* (10 partilik üretim) alternatifini seçtiğinde bir sonraki döneme 0 stokla başlanması (*j=0* durumuna geçiş) ile u_{00}^1 =472.5 TL ($\times 1000$) üretim maliyeti ortaya çıkmaktadır. Bir sonraki döneme 0 stokla başlanması diğer bir ifadeyle içinde bulunulan dönemin sonunda 0 stok kalmış olması nedeniyle stoklama maliyeti ($h_{00}^1 = 0$) ortaya çıkmamaktadır. Talep 10 parti olduğunda stoksuzluk söz konusu olmazken 11 veya daha fazla olduğunda işletme stoksuz kalmakta ve ek maliyete katlanmaktadır. 11 partilik talep olduğunda 1 partilik talep karşılanamadığından 21 TL ($\times 1000$)' lik stoksuzluk maliyeti ortaya çıkmaktadır ve talebin 11 parti olması olasılığı (Poisson olasılık değerlerinden) 0.0663' dür. 12 partilik talep olduğunda ise 2 partilik stoksuzluk sonucunda stoksuzluk maliyeti 42 TL ($\times 1000$) olmaktadır ve talebin 12 parti olması olasılığı 0,0829' dur. Benzer şekilde olası talep miktarları için maliyet ve olasılık değerleri çarpılıp toplandığında *i=0*, *k=1* ve *j=0* için beklenen stoksuzluk maliyeti $l_{00}^{1} = 107.85$ TL ($\times 1000$) olarak hesaplanmıştır. Bu doğrultuda toplam beklenen maliyet $c_{00}^{1} = 580$ olmaktadır. Ele alınan üretim/envanter sisteminde yer alan tüm durumlar için, her duruma ilişkin tüm hareket alternatiflerine göre hesaplanan geçiş olasılıkları ve ödüller EK 1'de yer alan tabloda özetlenmektedir.

- *Karar Kuralı ve Politika:* Üretim/envanter sisteminin modellenmesinde MD (Markovian-hafızasız ve deterministik) karar kuralı kullanılmakta ve durağan (zamana bağlı olmayan) arı (rassal olmayan) politika izlenmektedir.

4.3. MDP ile Ele Alınan Problemin LP ve GP Yaklaşımları ile Çözümü

Çalışmanın bu kısmında MDP' nin çözümü için LP ve GP modelleri ortaya konulmakta ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır.

4.3.1. MDP probleminin doğrusal programlama yaklaşımı ile çözülmesi

İşletmenin üretim/envanter problemi için ortaya konan MDP ve elde edilen veriler (EK1) ile sorunun çözümünde LP yaklaşımının kullanılması için, (2)'de yer alan GP modelinde ele alınan kazanç maksimizasyonu, maliyet minimizasyonu ve stoksuzluk riskinin minimizasyonu amaçlarının her birine yönelik ayrı ayrı üç LP modeli oluşturulmalıdır. Her bir amaç için LP modeli oluşturulurken diğer amaçlar modelin kısıtları olarak ele alınmaktadır.

LP Modeli I: Kazanç Maksimizasyonu

(1) ile verilen LP modelinde yer alan MDP kısıtları dışında, GP modelinde hedef olarak ele alınan maliyet (en fazla 1800 TL) ve stoksuzluk riskine ilişkin (en fazla 0,10) hedef kısıtları da LP modeline eklenmekte ve modelde gerçek kısıt olarak ele alınmaktadır. Bu doğrultuda, aylık beklenen ortalama kazancı maksimize eden LP modeli 3'de gösterilmektedir:

$$Z_{\max} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \ \text{için})$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k \leq 1800 \qquad \textit{(Maliyet Kısıtı)} \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k \leq 0.10 \qquad (\textit{Stoksuzluk Riskine İlişkin Kısıt})$$

$$x_i^k \geq 0 \qquad (i = 0,1,2 \ \text{ve} \ k = 1,2,\ldots,11 \ \text{için})$$

LP Modeli II: Maliyet Minimizasyonu

Karar değişkenleri aynı olan modelde amaç aylık beklenen ortalama maliyeti minimize etmek olduğundan amaç fonksiyonu $Z_{\min} = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k$ olacak ve maliyet kısıtı yerine önceki modelde amaç fonksiyonunda yer alan kazanç (en az 2100 TL) bu modelde kısıt olarak $\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k \geq 2100$ biçiminde yer alacaktır.

LP Modeli III: Stoksuzluk Riskinin Minimizasyonu

Amaç herhangi bir ayda stoksuz kalma olasılığını minimize etmek olduğu için amaç fonksiyonu $Z_{\min} = \sum_{k=1}^{11} x_0^k$ olmakta ve önceki iki modelde amaç fonksiyonunda yer alan kazanç ve maliyet ise bu modelde kısıt olarak $\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k \geq 2100$ ve $\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k \leq 1800$ ile gösterilmektedir.

GP modelinde ele alınan amaçların her biri için ayrı ayrı oluşturulan LP modellerinin POM-QM for Windows kullanılarak çözülmesi ile üç LP modelinin de olursuz çözüme sahip olduğu belirlenmiştir.

4.3.2. Markov karar süreci probleminin hedef programlama yaklaşımı ile çözülmesi

Probleme ilişkin GP modelinin oluşturulmasından önce modeldeki karar değişkenleri, kısıtlar, işletmenin amaçları, bu amaçların hedef değerleri ve hedeflerin öncelik düzeyleri (öncelik hiyerarşisi belirleniyorsa) tanımlanmalıdır.

- *Karar Değişkenleri:* GP modelinin karar değişkenleri de durumlara ilişkin denge durumu olasılıkları ve buna ek olarak GP yaklaşımının temelini oluşturan negatif (d^-) ve pozitif sapma (d^+) değişkenleridir.

▪ *Kısıtlar:* GP modelinde yer alan hedef kısıtları dışındaki kısıtlar diğer bir deyişle gerçek kısıtlar, LP formülasyonunda yer alan ve MDP' nin olasılık yapısından ve de denge durumundan kaynaklanan kısıtlardır.

▪ *Amaçlar ve Hedef Değerleri:* (2) ile ortaya konan modelde tanımlanan amaçlar ve hedef değerleri işletmenin planlama ve kalite yöneticileriyle yapılan görüşmeler doğrultusunda ele alınmış ve yukarıda LP modellerinde kullanıldığı gibi; b_w=2100 TL, b_c=1800 TL ve b_s=%10 olarak belirlenmiştir.

▪ *Hedeflerin Öncelik Düzeyleri:* İşletme yöneticileri ortaya konan üç amaç arasında çok farklılık yaratacak bir öncelik sıralaması yapmamış ve bu nedenle de bir öncelik hiyerarşisi belirlememiştir. Bu durumda eşit öncelikli 3 amaç söz konusu olduğundan, karar vericilerin bu görüşleri doğrultusunda, (2)'de yer alan öncelikli GP modeli, önceliklerin olmadığı GP modeline dönüştürülmüştür. İşletmenin MDP olarak modellenen üretim/envanter sistemi için oluşturulan GP modeli (4)'de gösterilmektedir.

$$Z_{\min} = d_w^- + d_c^+ + d_s^+$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} w_i^k x_i^k - d_w^+ + d_w^- = 2100 \qquad \textit{(Kazanç Hedefi)}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} c_i^k x_i^k - d_c^+ + d_c^- = 1800 \qquad \textit{(Maliyet Hedefi)}$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_0^k - d_s^+ + d_s^- = 0.10 \qquad \textit{(Stoksuzluk Riskine İlişkin Hedef)}$$

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k = 1 \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{11} x_j^k = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{11} x_i^k p_{ij}^k \qquad (j = 0,1,2 \ \text{ için})$$

$$x_i^k, d_w^+, d_w^-, d_c^+, d_c^-, d_s^+, d_s^- \geq 0 \quad (i = 0,1,2 \ \text{ ve } \ k = 1,2,\ldots,11 \ \text{ için})$$

(4) gösteriminde özetlenen GP modeline EK 1'de verilen beklenen kazanç, beklenen maliyet ve geçiş olasılıkları değerleri yerleştirildiğinde ve düzenlendiğinde elde edilen model EK 2'de gösterilmektedir. Eşit öncelikli üç amaca sahip GP modelinin POM-QM for Windows programının GP modülü ile çözülmesi sonucunda; işletmenin dönem (ay) başı envanter miktarı doğrultusunda belirlediği hedeflere ulaşmak için gerçekleştirmesi gereken üretim miktarları, hedeflere ulaşma düzeyleri ve hedeflerden sapmalar belirlenmiştir. Çözüm sonuçları Tablo 2'de özetlenmektedir. Tabloda denge durumu olasılıklarını gösteren değişkenlerin tümü değil sadece 0'dan farklı değer alan değişkenlere yer verilmiştir.

Tablo 2. Hedef Programlama Modelinin Çözüm Sonuçları

Hedeflere İlişkin Sonuçlar			
	Hedef Değeri	*Negatif Sapma (d^-)*	*Pozitif Sapma (d^+)*
Kazanç Hedefi (d_w^-)	2100 (YTL)	$d_w^- = 763.56$	$d_w^+ = 0$
Maliyet Hedefi (d_c^+)	1800 (YTL)	$d_c^- = 892.14$	$d_c^+ = 0$
Stoksuzluk Riski Hedefi (d_s^+)	0.10	$d_s^- = 0$	$d_s^+ = 0.03$
Karar Değişkenlerine İlişkin Sonuçlar			
Denge Durumu Olasılıkları	$x_0^{11} = 0.13$	$x_1^{10} = 0.06$	$x_2^{11} = 0.82$

GP modelinin çözümü ile elde edilen ve tablonun üst kısmında verilen hedeflere ilişkin sonuçlara göre işletme kazanç hedefine ulaşamamakta ve yaklaşık 764 TL ($\times 1000$) sapma ile aylık ortalama 1336 TL ($\times 1000$) kazanç elde etmektedir. İşletmenin beklenen aylık ortalama maliyeti (üretim, stoklama ve stoksuzluk maliyetlerinin toplamı) yaklaşık 908 YTL ($\times 1000$)' dir. Bu doğrultuda 1800 TL'lik beklenen ortalama aylık maliyet hedefinden daha düşük maliyet ($d_c^- = 892.14$) ortaya çıkmaktadır. Son olarak, işletmenin, herhangi bir ayda stoksuz kalma olasılığının en fazla %10 düzeyinde olmasına ilişkin hedefe ulaşamadığı ve %3 lük bir pozitif sapmayla ($d_s^+ = 0.03$) işletmenin stoksuz kalma olasılığının bu veriler altında %13 olduğu görülmektedir.

Tablonun alt bölümünde denge durumu olasılıklarına ilişkin olarak verilen sonuçlara göre; işletmenin gelecek dönemlerde stoksuz kalma olasılığı %13'dür ve işletmenin herhangi bir döneme, aya, %6 olasılıkla 1 parti ve %82 olasılıkla 2 parti ürünle başlaması beklenmektedir. İşletmenin 0 stokla döneme başlaması durumunda 20 parti üretim yapmayı (*k=11*), dönem başı stok 1 parti olduğunda 18 parti üretim yapmayı (*k=10*) ve başlangıçta 2 stok bulunduğunda da 18 parti üretim yapmayı (*k=11*) tercih etmesi beklenmektedir. Bu üretim kararları doğrultusunda da belirtildiği gibi sadece aylık maliyet hedefine ulaşılabilmektedir.

5. SONUÇ

İşletmelerin belirsizlik unsurunu da karar verme sürecinde ele alabilmelerini sağlayan yönetim bilimi tekniklerinden biri olan MDP' nin, günümüzde artan rekabetle birlikte işletmelerin sadece tek bir amaca değil birden fazla birbiriyle çatışan amaca odaklanmalarını zorunlu kılmasından dolayı, birden fazla amacın tek bir yapı içerisinde ele alınabildiği çok amaçlı karar verme teknikleriyle birlikte kullanılması gerekmektedir. GP yaklaşımı da yöneticilere bu yapıyı sağlamaktadır. MDP ile modellenen sorunların GP ile ele alınmasına ilişkin olarak literatürde işgücü planlaması ve proje yönetimine yönelik birkaç çalışma olduğu görülmektedir. Çalışmada literatürde yer alan GP modelleri temel alınarak işletmelerin MDP ile modellenebilen stokastik üretim/envanter sorunlarının çözümü için öncelikli ve öncelikli olmayan GP modelleri önerilmiştir. Otomotiv yan sanayinde yirmi yılı aşkın süredir faaliyet göstermekte olan bir işletmenin farklı modeller içinden en çok talep edilen ürününe ilişkin veriler ele alınarak üretim/envanter sistemi MDP olarak modellenmiştir. Ele alınan sorunda her ayın başında stokta bulundurulan ürün miktarı MDP' nin durumları olarak tanımlanmış ve sorunun çözümü için hem LP hem de GP yaklaşımları kullanılmıştır.

İşletme yönetimi, satışlardan elde edilen beklenen aylık ortalama kazancın maksimizasyonu, beklenen aylık ortalama maliyetin minimizasyonu ve stoksuz kalma riskinin minimizasyonu olmak üzere 3 farklı amacı ele almaktadır. Modellerde yer alan karar değişkenleri markovian sürecin denge durumu olasılıklarıdır. Üç amaç için ayrı ayrı LP modelleri formüle edilerek çözüldüğünde her üç problemde de olursuz çözüm ortaya çıkmıştır. Kar hedefinden negatif, maliyet hedefinden ve stoksuz kalma olasılığına ilişkin hedeften de pozitif sapmaların ele alınarak bu sapmaların toplamının minimize edilmesi amaçlandığında yani GP yaklaşımı kullanıldığında, işletmenin bu 3 amacı için birbirine kıyasla çok büyük farklılık yaratan bir öncelik hiyerarşisi ortaya konmadığından önceliklerin belirlenmediği yapı ele alınmıştır. Sorun doğrusal GP modeli ile çözüldüğünde elde edilen sonuçlara göre işletme kazanç ve stoksuzluk riskine ilişkin hedeflere ulaşamazken hedeflediği ortalama aylık maliyetten daha düşük maliyet ortaya çıkmıştır. Ayrıca, işletmenin stoksuz kalma olasılığının %13 ve bu durumda üreteceği miktarın 20 parti, işletmenin herhangi bir aya 1 parti ürün stokuyla başlama olasılığının %6 ve bu stok düzeyinde gerçekleştireceği üretimin 18 parti ve son olarak 2 parti ürün stokuyla döneme başlama olasılığının %82 ve vereceği üretim kararının 18 parti olması beklenmektedir.

Tüketici ihtiyaçlarının zamanında karşılanabilmesi ve maliyetler açısından işletmelerin rekabet avantajında büyük önem taşıyan ve stokastik yapıdaki üretim/envanter probleminin GP yaklaşımı ile modellenmesi ve çözülmesi ile, LP yaklaşımından farklı olarak, 3 amaç eş zamanlı olarak ele alınabilmekte ve bu hedeflere ulaşma düzeyleri belirlenebilmektedir. GP yaklaşımı, iş dünyasında yer alan artan belirsizlik ve rekabet nedeniyle olabilecek değişmeler ile hedef değerlerinden sapmaların da ortaya çıkabileceğini dikkate alarak daha esnek çözümlerin elde edilmesini sağlamaktadır. Ortaya konan yapının, karar vericilere, işgücü, pazarlama, finansman vb. konularla ilgili kararlarda da yardımcı olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Arthur, J. L. ve Ravindran A. (1978). An Efficient Goal Programming Algorithm Using Constraint Partitioning and Variable Elimination. *Management Science*, 24(8): 867-868.

Azaron, A., Katagiri, H. ve Sakawa, M. (2007). Time-Cost Trade-off Via Optimal Control Theory in Markov PERT Networks. *Annals of Operations Research*, 150(1): 47-64.

Berman, O. ve Sapna, K.P. (2001). Optimal Control of Service for Facilities Holding Inventory. *Computers and Operations Research*, 28(5): 429-441.

Ching, W-K. ve Ng, M.K. (2006). *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. USA: Springer.

D'epenoux, F. (1963). A Probabilistic Production and Inventory Problem. *Management Science*, 10(1): 98-108.

Denardo, E.V. (1970). On Linear Programming in a Markov Decision Problem. *Management Science*, 16(5): 281-288.

Derman, C. ve Klein, M. (1965). Some Remarks on Finite Horizon Markovian Decision Models. *Operations Research*, 13(2): 272-278.

Georgiou, A.C. (1999). Aspirations and Priorities in a Three Phase Approach of a Nonhomogeneous Markov System. *European Journal of Operational Research*, 116(3): 565-583.

Georgiou, A.C. ve Tsantas, N. (2002). Modelling Recruitment Training in Mathematical Human Resource Planning. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 18(1): 53-74.

Ghellinck, G.T.D. ve Eppen, G.D. (1967). Linear Programming Solutions for Separable Markovian Decision Problems. *Management Science*, 13(5): 371-394.

Golany, B., Yadin, M. ve Learner, O. (1991). A Goal Programming Inventory Control Model Applied at a Large Chemical Plant. *Production and Inventory Management Journal*, 32(1): 16-23.

Hinomoto, H. (1971a). Selective Control Independent Activities: Linear Programming of Markovian Decisions. *Management Science*, 18(1): 88-96.

Hinomoto, H. (1971b). Sequential Control of Homogeneous Activities-Linear Programming of Semi-Markovian Decisions. *Operations Research*, 19(7): 1664-1674.

Hordijk, A. ve Kallenberg, C.M. (1979). Linear Programming and Markov Decision Chains. *Management Science*, 25(4): 352-362.

Howard, R.A. (1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. USA: M.I.T. Press

Ignizio, J.P. (1978). A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjective Analysis. *Journal of Operational Research Society*, 29(11): 1109-1119.

Jaaskelainen, V. (1969). A Goal Programming Model of Aggregate Production Planning. *The Swedish Journal of Economics*, 71(1): 14-29.

Jayakumar, A. ve Asgarpoor, S. (2006). Maintenance Optimization of Equipment by Linear Programming. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20(1): 183-193.

Kalu, T.Ch.U. (1994). Determining the Impact of Nigeria's Economic Crisis on the Multinational Oil Companies: A Goal Programming Approach. *The Journal of the Operational Research Society*, 45(2): 165-177.

Kalu, T.Ch.U. (1999). Capital Budgeting Under Uncertainty: An Extended Goal Programming Approach. *International Journal of Production Economics*, 58(3): 235-251.

Kislev, Y. ve Amiad, A. (1968). Linear and Dynamic Programming in Markov Chains. *American Journal of Agricultural Economics*, 50(1): 111-129.

Klein, M. (1962). Inspection-Maintenance-Replacement Schedules Under Markovian Deterioration. *Management Science*, 9(1): 25-32.

Klein, M. (1966). Markovian Decision Models for Reject Allowance Problems. *Management Science*, 12(5): 349-358.

Kolesar, P. (1967). Randomized Replacement Rules Which Maximize the Expected Cycle Length of Equipment Subject to Markovian Deterioration. *Management Science*, 13(11): 867-876.

Kornbluth, J.S.H. (1981). Aggregate Manpower Planning Using a Markovian Goal Programming Approach. *The Journal of the Operational Research Society*, 32(10): 940-943.

Kristensen, A.R. (1996), "Dynamic Programming and Markov Decision Processes", http://www.jbs.agrsci.dk/~ejo/nova/notat48.pdf, Erişim: 18.04.2006

Lee, S.M. (1979). *Goal Programming Methods for Multiple Objective Integer Programs*, OR Monograph Series No:2. Atlanta: American Institute of Industrial Engineers Inc.

Lee, S. M. ve Moore, L.J. (1975). *Introduction to Decision Science*. New York: Petrocelli/Charter.

Manne, A.S. (1960). Linear Programming and Sequential Decisions. *Management Science*, 6(3): 259-267.

Mrkaic, M. (2002). Policy Iteration Accelerated with Krylov Methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(4): 517-545.

Nazareth, J.L. ve Kulkarni, R.B. (1986). Linear Programming Formulations of Markov Decision Processes. *Operations Research Letters*, 5(1): 13-16.

Olson, D. (1984). Comparison of Four Goal Programming Algorithms. *Journal of Operational Research Society*, 35(4): 347-354.

Parzen, E. (1962). Stochastic Processes, Holden-Day Inc., USA.

Perez, S.J. (1985). Multiple Objective Decision Making Using Goal Programming Techniques: An Interactive Microcomputer Approach. *Yayınlanmamış Doktora Tezi*, Graduate College of Texas A&M University, Texas.

Puterman, L. (1994). *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. UK: John Wiley&Sons Inc.

Ravindran, A., Phillips, D.T. ve Solberg, J.J. (1987). *Operations Research: Principles and Practice*, Second Edition. USA: John Wiley and Sons Inc.

Schniederjans, M.J. ve Kwak, N.K. (1982). An Alternative Solution Method for Goal Programming Problems: A Tutorial. *Journal of Operational Research Society*, 33(3): 247-251.

Tamiz, M., Jones, D. ve Romero, C. (1998). Goal Programming for Decision Making: An Overview of the Current State-of-the-Art. *European Journal of Operational Research*, 111(3): 569-581.

Tamiz, M. ve Jones, D.F. (1996). An Overview of Current Solution Methods and Modelling Practices in Goal Programming, *Multi-Objective Programming and Goal Programming Theories and Applications* (ss.198-211). Germany: Springer-Verlag.

Trzaskalik, T. (1998). *Multiobjective Analysis in Dynamic Environment.*, Katowice: The Karol Adamiecki University of Economics Press

Vanguri, U.P. (1998). Goal Programming for Pension Fund Portfolio Modeling. *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi*, University of Manitoba The Warren Centre for Actuarial Studies and Research, Manitoba.

Wolfe, P. ve Dantzig, G.B. (1962). Linear Programming in a Markov Chain. *Operations Research*, 10(5): 702-710.

Yates, C.M. ve Rehman, T. (1998). A Linear Programming Formulation of the Markovian Decision Process Approach to Modelling the Dairy Replacement Problem. *Agricultural Systems*, 58(2): 185-201.

Zanakis, S.H. ve Maret, M.W. (1981). A Markovian Goal Programming Approach to Aggregate Manpower Planning. *The Journal of the Operational Research Society*, 32(1): 55-63.

EK 1: MDP'nin Farklı Durum ve Alternatiflere İlişkin Geçiş Olasılıkları ve Ödülleri

Durum	*Hareket*	*Geçiş Olasılıkları*			*Maliyet*			*Kazanç*			*Beklenen Maliyet*	*Beklenen Kazanç*
i	k	p_{i0}^k	p_{i1}^k	p_{i2}^k	c_{i0}^k	c_{i1}^k	c_{i2}^k	w_{i0}^k	w_{i1}^k	w_{i2}^k	c_i^k	w_i^k
0 (0 stok)	1 (10 birim üret)	.9301	,0324	,0374	80	99	25	050	45	8	576	1008
	2 (11 birim üret)	.8815	.0486	.0699	09	46	72	155	050	9	603	1073
	3 (12 birim üret)	.8152	.0663	.1185	39	93	20	260	155	10	634	1117
	4 (13 birim üret)	.7324	.0829	.1848	71	41	67	365	260	87	668	1139
	5 (14 birim üret)	.6368	.0956	.2676	05	88	14	470	365	91	706	1144
	6 (15 birim üret)	.5343	.1024	.3632	41	35	61	575	470	21	748	1145
	7 (16 birim üret)	.4319	.1024	.4657	79	82	09	680	575	72	793	1153
	8 (17 birim üret)	.3359	.0960	.5681	19	30	56	785	680	33	841	1178
	9 (18 birim üret)	.2511	.0847	.6641	61	77	03	890	785	95	890	1220
	10 (19 birim üret)	.1805	.0706	.7489	05	24	50	995	890	.046	940	1277
	11 (20 birim üret)	.1248	.0557	.8195	49	71	98	100	995	.179	990	1340
1 (1 stok)	1 (9 birim üret)	.9301	.0324	.0374	33	52	78	050	45	8	528	1008
	2 (10 birim üret)	.8815	.0486	.0699	62	99	25	155	050	9	556	1073
	3 (11 birim üret)	.8152	.0663	.1185	92	46	72	260	155	10	587	1117
	4 (12 birim üret)	.7324	.0829	.1848	24	93	20	365	260	87	621	1139
	5 (13 birim üret)	.6368	.0956	.2676	58	41	67	470	365	91	658	1144

	6 (14 birim üret)	.5343	.1024	.3632	94	88	14	575	470	21	700	1145
	7 (15 birim üret)	.4319	.1024	.4657	32	35	61	680	575	72	746	1153
	8 (16 birim üret)	.3359	.0960	.5681	72	82	09	785	680	33	794	1178
	9 (17 birim üret)	.2511	.0847	.6641	14	30	56	890	785	95	843	1220
	10 (18 birim üret)	.1805	.0706	.7489	58	77	03	995	890	046	893	1277
	11 (19 birim üret)	.1248	.0557	.8195	02	24	50	100	995	179	943	1340
2 (2 stok)	1 (8 birim üret)	.9301	.0324	.0374	86	04	31	050	45	8	481	1008
	2 (9 birim üret)	.8815	.0486	.0699	15	52	78	155	050	9	509	1073
	3 (10 birim üret)	.8152	.0663	.1185	45	99	25	260	155	10	539	1117
	4 (11 birim üret)	.7324	.0829	.1848	77	46	72	365	260	87	573	1139
	5 (12 birim üret)	.6368	.0956	.2676	10	93	20	470	365	91	611	1144
	6 (13 birim üret)	.5343	.1024	.3632	47	41	67	575	470	21	653	1145
	7 (14 birim üret)	.4319	.1024	.4657	85	88	14	680	575	72	699	1153
	8 (15 birim üret)	.3359	.0960	.5681	25	35	61	785	680	33	747	1178
	9 (16 birim üret)	.2511	.0847	.6641	67	82	09	890	785	95	796	1220
	10 (17 birim üret)	.1805	.0706	.7489	10	30	56	995	890	046	846	1277
	11 (18 birim üret)	.1248	.0557	.8195	55	77	03	100	995	179	896	1340

EK 2. Hedef Programlama Modeli

Amaç Fonksiyonu: $Z_{\min} = d_w^- + d_c^+ + d_s^+$

Hedef Kısıtları: *1. Kazanç Hedefi* *2. Maliyet Hedefi* *3. Stoksuzluk Riskine İlişkin Hedef:*

$$1008(x_0^1+x_1^1+x_2^1)+1073(x_0^2+x_1^2+x_2^2)+1117(x_0^3+x_1^3+x_2^3)+1139(x_0^4+x_1^4+x_2^4)+1144(x_0^5+x_1^5+x_2^5)+1145(x_0^6+x_1^6+x_2^6)$$
$$+1153(x_0^7+x_1^7+x_2^7)+1178(x_0^8+x_1^8+x_2^8)+1220(x_0^9+x_1^9+x_2^9)+1277(x_0^{10}+x_1^{10}+x_2^{10})+1340(x_0^{11}+x_1^{11}+x_2^{11})-d_w^+ + d_w^- = 2100$$

$$576x_0^1+603x_0^2+634x_0^3+668x_0^4+706x_0^5+748x_0^6+793x_0^7+841x_0^8+890x_0^9+940x_0^{10}+990x_0^{11}+528x_1^1+556x_1^2+587x_1^3+621x_1^4+658x_1^5+700x_1^6$$
$$+746x_1^7+794x_1^8+843x_1^9+893x_1^{10}+943x_1^{11}+481x_2^1+509x_2^2+539x_2^3+573x_2^4+611x_2^5+653x_2^6+699x_2^7+747x_2^8+796x_2^9+846x_2^{10}+896x_2^{11}-d_c^+ + d_c^- = 1800$$

$$x_0^1+x_0^2+x_0^3+x_0^4+x_0^5+x_0^6+x_0^7+x_0^8+x_0^9+x_0^{10}+x_0^{11}-d_s^+ + d_s^- = 0.10$$

Gerçek Kısıtlar:

$$x_0^1+x_0^2+x_0^3+x_0^4+x_0^5+x_0^6+x_0^7+x_0^8+x_0^9+x_0^{10}+x_0^{11}+x_1^1+x_1^2+x_1^3+x_1^4+x_1^5+x_1^6+x_1^7+x_1^8+x_1^9+x_1^{10}+x_1^{11}+x_2^1+x_2^2+x_2^3+x_2^4+x_2^5+x_2^6+x_2^7+x_2^8+x_2^9+x_2^{10}+x_2^{11}=1$$

j=0 için

$$0.0699x_0^1+0.1105x_0^2+0.1848x_0^3+0.2676x_0^4+0.3632x_0^5+0.4657x_0^6+0.5681x_0^7+0.6641x_0^8+0.7489x_0^9+0.8195x_0^{10}+0.8752x_0^{11}$$
$$-0.9301x_1^1-0.8815x_1^2-0.8152x_1^3-0.7324x_1^4-0.6368x_1^5-0.5343x_1^6-0.4319x_1^7-0.3359x_1^8-0.2511x_1^9-0.1805x_1^{10}-0.1248x_1^{11}$$
$$-0.9301x_2^1-0.8815x_2^2-0.8152x_2^3-0.7324x_2^4-0.6368x_2^5-0.5343x_2^6-0.4319x_2^7-0.3359x_2^8-0.2511x_2^9-0.1805x_2^{10}-0.1248x_2^{11}=0$$

j=1 için

$$-0.0324x_0^1-0.0486x_0^2-0.0663x_0^3-0.0829x_0^4-0.0956x_0^5-0.1024x_0^6-0.1024x_0^7-0.0960x_0^8-0.0847x_0^9-0.0706x_0^{10}-0.0557x_0^{11}$$
$$+0.9676x_1^1+0.9514x_1^2+0.9337x_1^3+0.9171x_1^4+0.9044x_1^5+0.8976x_1^6+0.8976x_1^7+0.9040x_1^8+0.9153x_1^9+0.9294x_1^{10}+0.9443x_1^{11}$$
$$-0.0324x_2^1-0.0486x_2^2-0.0663x_2^3-0.0829x_2^4-0.0956x_2^5-0.1024x_2^6-0.1024x_2^7-0.0960x_2^8-0.0847x_2^9-0.0706x_2^{10}-0.0557x_2^{11}=0$$

j=2 için

$$-0.0374x_0^1-0.0699x_0^2-0.1185x_0^3-0.1848x_0^4-0.2676x_0^5-0.3632x_0^6-0.4657x_0^7-0.5681x_0^8-0.6641x_0^9-0.7489x_0^{10}-0.8195x_0^{11}$$
$$-0.0374x_1^1-0.0699x_1^2-0.1185x_1^3-0.1848x_1^4-0.2676x_1^5-0.3632x_1^6-0.4657x_1^7-0.5681x_1^8-0.6641x_1^9-0.7489x_1^{10}-0.8195x_1^{11}$$
$$+0.9301x_2^1+0.8815x_2^2+0.8152x_2^3+0.7324x_2^4+0.6368x_2^5+0.5343x_2^6+0.4319x_2^7+0.3359x_2^8+0.2511x_2^9+0.1805x_2^{10}+0.1248x_2^{11}=0$$

Pozitiflik Koşulu:

$$x_0^1,x_0^2,x_0^3,x_0^4,x_0^5,x_0^6,x_0^7,x_0^8,x_0^9,x_0^{10},x_0^{11},x_1^1,x_1^2,x_1^3,x_1^4,x_1^5,x_1^6,x_1^7,x_1^8,x_1^9,x_1^{10},x_1^{11},x_2^1,x_2^2,x_2^3,x_2^4,x_2^5,x_2^6,x_2^7,x_2^8,x_2^9,x_2^{10},x_2^{11},d_w^+,d_w^-,d_c^+,d_c^-,d_s^+,d_s^- \geq 0$$