Dokuz Eylül Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Cilt: 15, Sayı: 4, Yıl: 2013, Sayfa: 693-703
ISSN: 1302-3284 E-ISSN: 1308-0911

**Yayın Geliş Tarihi:** 28.06.2013
**Yayına Kabul Tarihi:** 31.10.2013
**Online Yayın Tarihi:** 20.03.2014

# PEARSON DAĞILIŞ AİLESİNİN GÜVENİLİRLİK ANALİZİNDE KULLANILMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA[1]

Ali Kemal ŞEHİRLİOĞLU[*]
Mustafa ÜNLÜ[**]

***Öz***

*Günlük hayatımızda kullandığımız tüm ürünler veya sistemler zaman içinde yıpranmakta ve bunun sonucunda da bozulmaktadır. Üreticiler açısından bu olası yıpranma ve bozulmaların sebeplerinin önceden bilinmesi hayati önem taşımaktadır. Bu bakış açısıyla ürünlerin potansiyel yaşamlarının belirlenmesi amacına yönelik güvenilirlik analizi çalışmaları yapılmaktadır. Güvenilirlik analizinin temelinde hata sürelerinin dağılımı vardır. Uygun dağılım belirlenirken çeşitli istatistiksel araçlardan yararlanılabilir. Güvenilirlik analizinde genellikle kümülatif dağılım fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu, hazard fonksiyonu, ortamla artık yaşam fonksiyonu ve artık yaşam varyansı bu dağılımı belirlemede kullanılan en yaygın araçlardır. Aynı zamanda hata dağılışları bu fonksiyonlar arasındaki ilişkilerden yararlanılarak karakterize edilebilmektedir. Pearson diferansiyel denklem sistemi, güvenilirlik analizinde kullanılan birçok dağılışı içerisinde barındırmaktadır. Bu nedenle güvenilirlik analizinde önemli bir yeri vardır. Bu çalışmada Pearson diferansiyel denklem sisteminin, asimetrik dağılım türeten kübik paydalı bir yapısı ele alınacaktır. Daha sonra bu yapı için koşullu momentler ile asimetri ölçüleri incelenecektir.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Güvenilirlik Analizi, Kübik Paydalı Pearson Diferansiyel Denklem Sistemi, Koşullu Momentler.*

# A STUDY BASED ON USING PEARSON DISTRIBUTION FAMILY ON RELIABILITY ANALYSIS[2]

***Abstract***

*All products or systems that we use in daily life, degrade in time so, they ultimately fail. It is very crucial for manufacturers to forecast the reasons of the failures before. With that perspective reliability analysis is carried out to determine the potential lifetime of*

[1] Bu çalışma Mustafa Ünlü'nün "Pearson Dağılış Ailesinin Güvenilirlik Analizinde Kullanılması Üzerine Bir Çalışma" başlıklı yüksek lisans tezinden (Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2013) üretilmiştir.

[*] Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, kemal.sehirli@deu.edu.tr

[**] Araş. Gör., Bingöl Üniversitesi, Finansal Ekonometri Bölümü, munlu@bingol.edu.tr

[2] This article is derived from Mustafa Ünlü's master's thesis titled "A Study Based On Using Pearson Distribution Family On Reliability Analysis" (Dokuz Eylül University, Graduate School of Social Sciences, 2013).

*products. Failure time's distribution is the basis of the reliability analysis. While determining the proper distribution, some statistical methods can be used. Cumulative distribution, reliability function, hazard function, mean residual life, variance residual life are most common tools to determine proper distribution in reliability analysis. At the same time failure distributions can be characterized by using relations between these functions.*

*Pearson Differantial Equation System includes many distributions which are also used in reliability analysis commonly. Because of this it plays a very important role in reliability analysis. In this study, Pearson Differantial Equation System's cubic denominator structure which derives asymmetric distribution will be handled. Then conditional moments and asymmetry measures will be analysed for that structure.*

***Keywords:*** *Reliability Analysis, Pearson Differantial Equation System, Conditional Moments.*

## GİRİŞ

Güvenilirlik, belirli bir zaman aralığında, belirlenmiş koşullar altında bir fonksiyonun hatasız çalışma olasılığıdır Gerçek hayatta hiçbir ürün ya da sistem güvenilir değildir. Çünkü zamanla birlikte aşınmalar meydana gelmekte ve bu da nihai olarak hataya yol açmaktadır. Bahsedilen hataların rassal olarak meydana gelmesi sebebiyle güvenilirlik olasılıksal bir çerçevede değerlendirilmelidir.

Güvenilirlik analizinde, hataların dağılışlarını karakterize etmek ve böylece uygun dağılışları tanımlamak amacıyla hata oranı, ortalama artık yaşam ve dayanıklılık fonksiyonu gibi araçlar geliştirilmiştir. Böylece araştırmacı hataları bu fonksiyonlar cinsinden ifade ederek model tanımlanması probleminin üstesinden gelmiş olmaktadır (Sindu, 2002: 1).

Normal dağılış, 19.yy'da tüm istatistiksel analizler için çok önemli bir rol oynamıştır. Çoğu teorik çalışmalarda dağılışın normal olduğu ya da normale yakın olduğu varsayılmıştır. Fakat gerçek hayattaki verilere uygun bir dağılış bulma isteği ortaya çıktığında, verilerin normal dağılımdan oldukça farklı karakteristikleri olduğu fark edilmiştir. Böylece 20.yy'ın başlarında normal olmayan eğriler kullanılmaya başlanmıştır. Karl Pearson bu tarz dağılışları tanımlamak için üstel, gamma, beta, weibull vb. güvenilirlik analizinde sıkça kullanılan birçok önemli olasılık modelini içeren diferansiyel denklem sistemi oluşturmuştur. Bu özelliği sebebiyle Pearson diferansiyel denklemleri güvenilirlik analizi çalışmalarında sıkça kullanılmıştır. (Unnikrishnan ve Sankaran, 1991; Glanzel, 1991; Sindu, 2002; Osaki ve Li, 1988; Unnikrishnan ve Sankaran, 1998; Asadi 1998; Unnikrishnan ve diğerleri, 2003; Shakil ve diğerleri, 2010; Glanzel ve diğerleri, 1984; Kotz, 1974; Papathanasiou, 1995; Navarro ve diğerleri, 1998). Bu çalışmalarda kuadratik paydalı klasik Pearson diferansiyel denklemi kullanılarak farklı bakış açılarıyla diferansiyel denklemin çözümleri bulunmuştur. Unnikrishnan ve Sankaran, diferansiyel denklemi, güvenilirlik fonksiyonu tanımından yararlanarak karakterize etmişler ve böylece güvenilirlik analizinde kullanılan güvenilirlik fonksiyonu, canlılık fonksiyonu ve hazard fonksiyonlarıyla diferansiyel denklem arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmışlardır (Unnikrishnan ve Sankaran, 1991). Glanzel, aynı diferansiyel denklem sistemi için koşullu momentler ile Pearson Dağılış Ailesi için bir karakterizasyon önermiştir (Glanzel, 1991).

Güvenilirlik analizinde kullanılan dağılışlar genellikle asimetrik dağılışlardır. Bahsedilen tipteki dağılışlar incelenirken, asimetri ölçüleri de göz önüne alınmalıdır. Dağılışın çarpıklığını belirlemek için üçüncü, basıklığı belirmek için ise dördüncü moment birer ölçü olarak kullanılabilir. Yukarıda bahsedilen çalışmalarda Pearson Diferansiyel Denklem Sistemi, kuadratik paydalı yapısıyla ele alınmış ve bahsedilen asimetri ölçüleri değerlendirilmemiştir. Bu çalışmada Pearson diferansiyel denklemi, asimetrik dağılışlar türeten kübik paydalı formuyla ele alınacaktır. Elde edilen yeni form hem Glanzel'in hem de Unnikrishnan ve Sankaran'ın önerdiği yöntemler kullanılarak karakterize edilecektir. Yapılan işlemler sonucunda da üçüncü moment elde edilerek, kübik paydalı diferansiyel denklem formuna uygun bir dağılış için asimetri ölçüleri bulunacaktır.

## KOŞULLU MOMENT YAKLAŞIMI

X sürekli bir rassal değişken olsun. X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu *f(x)* aşağıdaki diferansiyel denklemi sağladığında Pearson Dağılış Ailesi'ne aittir (Ünlü, 2013);

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3} \tag{1.1}$$

**Teorem 1:** X sürekli bir rassal değişken olsun.

$E(X^3) < \infty, E(X^3|X > x)\,, E(X^2|X > x)\ ve\ E(X|X > x)$ türevlenebilir olmak üzere, aşağıdaki koşul sağlandığında X Pearson Dağılışı göstermektedir;

$$4b_3 E(X^3|X > x) = A(x)E(X^2|X > x) + B(x)E(X|X > x) + C(x)$$

Burada

$$A(x) = 3b_3 x - 3b_2,\ B(x) = (a_1 + 2b_2)x - 2b_1,\ C(x) = (a_0 + b_1)x - b_0$$

**İspat:** Vitality fonksiyonu**,** herhangi bir $t$ zamanına kadar hayatta kalmış bir bileşenin kalan beklenen ömrünü tanımlar. $t$ $(0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir değişken olmak üzere,

$$m(t) = E(X|X > t)$$

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty x f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon aynı zamanda,

$E(X|X>x)=\frac{1}{R(x)}\int_x^b tf(t)dt$'dır. O halde,

$$4b_3\int_x^b t^3 f(t)dt=(3b_3x-3b_2)\int_x^b t^2 f(t)dt+$$

$$[(a_1+2b_2)x-2b_1]\int_x^b tf(t)dt+[(a_0+b_1)x-b_0]\int_x^b f(t)dt$$

yazılabilir. Bu eşitlikte iki kez türev uygulanırsa,

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)}=\frac{(3a_1+6b_2-6b_0)x+2(a_0+b_1)}{b_3x^3+(3b_0-a_1-2b_2)x^2(2b_1-a_0-b_1)x+b_0}$$

elde edilir. Böylece incelenen yapının kübik paydalı Pearson diferansiyel denklem sitemine uygun olduğu görülmektedir.

(1.1)'deki diferansiyel denklemden,

$$f(x)[a_0+a_1x]=f^{'}(x)[b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3]$$

Bu ifadenin x'ten b'ye integrali alınırsa;

$$\int_x^b [a_0+a_1t]\,f(t)dt=\int_x^b [b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3]\,f^{'}(t)dt$$

Eşitliğin sağ tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$$(b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3)f(t)|_x^b-b_0\int_x^b f(t)dt-2b_2\int_x^b tf(t)dt$$

$$-3b_3\int_x^b t^2f(t)dt$$

Eşitliğin sol tarafı;

$$\int_x^b [a_0+a_1t]\,f(t)dt=a_0\int_x^b f(t)dt+a_1\int_x^b tf(t)dt$$

Bu iki eşitlik birleştirilip gerekli işlemler yapıldığında;

$$-(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\frac{f(x)}{R(x)}=(a_0+b_0)+(a_1+2b_2)E(X|X>x)$$

$$+3b_3E(X^2|X>x)$$

(1.2)

Şimdi (1.1)'deki eşitliğin pay ve paydası x ile genişletilirse;

$$f(x)[a_0x + a_1x^2] = f'(x)[b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4]$$

olur. Aynı işlemler bu eşitlik için uygulandığında;

$$\int_x^b [a_0t + a_1t^2]\, f(t)dt = \int_x^b [b_0t + b_1t^2 + b_2t^3 + b_3t^4]\, f'(t)dt$$

Kısmi integral ile eşitliğin sağ tarafı,

$$(b_0t + b_1t^2 + b_2t^3 + b_3t^4)f(t)|_x^b - b_0\int_x^b f(t)dt -$$

$$2b_1\int_x^b tf(t)dt - 3b_2\int_x^b t^2f(t)dt - 4b_3\int_x^b t^3f(t)dt$$

Sol taraf;

$$\int_x^b [a_0t + a_1t^2]\, f(t)dt = a_0\int_x^b tf(t)dt + a_1\int_x^b t^2f(t)dt$$

İki ifade birleştirilip gerekli işlemler yapıldığında;

$$-(b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4)\frac{f(x)}{R(x)} = b_0 + (a_0 + 2b_1)E(X|X > x)$$

$$+(a_1 + 3b_2)E(X^2|X > x) + 4b_3E(X^3|X > x)$$

(1.3)

(1.2)'deki ifade x ile genişletilip (1.3)'e eşitlenirse;

$$(a_0 + b_1)x + (a_1 + 2b_2)xE(X|X > x) + 3b_3xE(X^2|X > x) =$$

$$b_0 + (a_0 + 2b_1)E(X|X > x) + (a_1 + 3b_2)E(X^2|X > x) + 4b_3E(X^3|X > x)$$

Elde edilir. Bu sonuç düzenlendiğinde,

$$4b_3E(X^3|X > x) = [(a_0 + b_1)x - b_0] + [(a_1 + 2b_2)x$$

$$-(a_0 + 2b_1)]E(X|X > x) + [3b_3x - (a_1 + 3b_2)]E(X^2|X > x)$$

Bu durumda;

$$A(x) = 3b_3x - (a_1 + 3b_2)$$

$$B(x) = (a_1 + 2b_2)x - (a_0 + 2b_1)$$

$$C(x) = (a_0 + b_1)x - b_0$$

olur. Bu sonuçla üçüncü dereceden koşullu moment ile ikinci ve birinci derecelerden koşullu momentler arasındaki ilişki kübik paydalı diferansiyel denklemin parametreleri cinsinden elde edilmiştir.

## GÜVENİLİRLİK FONKSİYONU YAKLAŞIMI

Pearson diferansiyel denkleminin kübik paydalı yapısı için güvenilirlik fonksiyonunun tanımından yararlanarak aşağıdaki gibi bir karakterizasyon yapılabilir.

**Teorem 2:** X sürekli bir rassal değişken olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlandığında, X'in dağılışı kübik paydalı Pearson diferansiyel denklemi yapısına uymaktadır.

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) = \left[(a_1 + 2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2\right]\left(1 + \frac{1}{R(x)}\right)$$

**İspat:** (1.1)'deki diferansiyel denklemden,

$$\int_x^b (a_0 + a_1x)f(x)dx = \int_x^b (\,b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f'(x)dx$$

olduğu biliniyor. Eşitliğin sağ tarafında kısmi integral uygulanırsa;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x)|_x^b - b_1\int_x^b f(x)dx$$
$$- 2b_2\int_x^b xf(x)dx - 3b_3\int_x^b x^2f(x)dx$$

Buradaki terimler,

$$\int_x^b f(x)dx = R(x)$$

$$-2b_2\int_x^b xf(x)dx = -2b_2xR(x) + 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$-3b_3\int_x^b x^2f(x)dx = -3b_3x^2 + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

olmak üzere, eşitliğin sağ tarafı;

$$-(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x) - b_1R(x) - 2b_2xR(x) + 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$- 3b_3x^2R(x) + 6b_3\int_x^b xR(x)dx$$

olur. Sol taraf için aynı işlemler uygulanırsa;

$$\int_x^b (a_0 + a_1x)f(x)dx = a_0R(x) + a_1xR(x) - a_1\int_x^b R(x)dx$$

Elde edilen sonuçlar birleştirildiğinde;

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)f(x) + b_1R(x) + 2b_2xR(x) - 2b_2\int_x^b R(x)dx$$

$$+3b_3x^2R(x) - 6b_3\int_x^b xR(x)dx + a_0R(x) + a_1xR(x) - a_1\int_x^b R(x)dx = 0$$

Burada $f(x) = h(x).R(x)$ eşitliğinden yararlanarak;

$$[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)h(x) + (a_0 + b_1) + (a_1 + 2b_2)x + 3b_3x^2]$$
$$= \frac{(2b_2 + a_1)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx + \frac{6b_3}{R(x)}\int_x^b xR(x)dx$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında;

$$A = \frac{(2b_2 + a_1)}{R(x)}\int_x^b R(x)dx + \frac{6b_3}{R(x)}\int_x^b xR(x)dx$$

olsun. Moment denklemlerinden $[a_0 + b_1] + [a_1 + 2b_2]\mu_1' + 3b_3\mu_2' = 0$ olduğu biliniyor (bkz. Ek, Eşitlik 1.1.1). Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa,

$$a_0 + b_1 + (a_1 + 2b_2)\int_x^b xf(x)dx + 3b_3\int_x^b x^2f(x)dx = 0$$

$$-3b_3\int_x^b x^2f(x)dx = a_0 + b_1 + (a_1 + 2b_2)\int_x^b xf(x)dx$$

Bu ifade için kısmi integral alınırsa;

$$\int_x^b xR(x)dx = -\frac{(a_0+b_1)}{6b_3} - \frac{1}{6b_3}[-(a_1+2b_2-3b_3x]xR(x)$$

$$-\frac{(a_1+2b_2)}{6b_3}\int_x^b R(x)dx$$

Elde edilen bu sonuç A'da yerine yazıldığında,

$$A = -\frac{(a_0+b_1)}{R(x)} + [(a_1+2b_2)+3b_3x]x$$

olur. Bu ifadeyi yerine koyduğumuzda;

$$(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)h(x) = -(a_0+b_1)\left(1+\frac{1}{R(x)}\right)$$

Moment denklemlerinden $-(a_0+b_1) = (a_1+2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2$ (bkz. Ek Eşitlik 1.1.1) olduğu biliniyor. O halde eşitlik,

$$(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)h(x) = \left[(a_1+2b_2)\mu_1 + 3b_3\mu_2\right]\left(1+\frac{1}{R(x)}\right)$$

Böylece kullanılan Pearson diferansiyel denklem tipi için güvenilirlik fonksiyonu, hazard fonksiyonu, birinci moment ve ikinci moment arasındaki ilişki elde edilmiştir.

## SONUÇ

Güvenilirlik analizinde hata dağılışlarının doğru modellenmesi çok önemlidir. Yapılacak olan çalışmaların doğruluğu da model seçiminin isabetli yapılmasına bağlıdır. Günlük hayatımızda kullandığımız ürünlerin çoğunun hata dağılışları asimetriktir. Dolayısıyla güvenilirlik analizinde de en çok bu tip dağılışlar kullanılmaktadır. Bu bakış açısıyla bu çalışmada Pearson diferansiyel denklemi asimetrik dağılışlar türeten bir formda kullanılmıştır.

Daha önce yapılan çalışmalarda (bkz. Unnikrishnan ve Sankaran, 1991; Glanzel, 1991; Sindu, 2002) güvenilirlik fonksiyonu yaklaşımı ve koşullu momentler ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu çalışmada parametreleri belirlenmiş bir dağılışın Pearson diferansiyel denkleminin kübik paydalı yapısına uygun olduğu durumda önce güvenilirlik fonksiyonu yaklaşımıyla birinci ve ikinci moment ile güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu arasındaki ilişki elde edildi. Daha sonra koşullu moment yaklaşımı dikkate alınarak, üçüncü dereceden koşullu moment karakterize edildi. Tüm bu bilgiler beraber değerlendirilerek üçüncü dereceden koşullu moment ile güvenilirlik fonksiyonu ve hazard fonksiyonu arasındaki ilişki elde edilmiş oldu. Bu bilgilerin elde edilmesiyle araştırmacının model üzerindeki hâkimiyetinin artması hedeflenmiştir. Elde edilen bu asimetri ölçülerinin bilinmemesi durumunda aynı ortalama ve varyansa sahip fakat çarpıklık ve basıklıkları farklı dağılışlar ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla bu farklı dağılışların her biri için farklı güvenilirlik ölçüleri olacaktır. Bu çalışmada önerilen yöntem ile böyle durumlarda araştırmacının elinde model hakkında karar vermek için daha fazla bilgi mevcut olacaktır.

## KAYNAKÇA


Asadi, M. (1998). Characterization of the pearson system of distributions based on reliability measures. *Statistical Papers*, 39 (1): 347-360.

Elderton, W. P. (1953). *Frequency curves and correlation*. London: Charles and Edwin Layton.

Fisz, M. (1967). *Probability theory and mathematical statistics.* New York: John Wiley and Sons Inc.

Glanzel, W., Telcs, A. ve Schubert, A. (1984). Characterization by truncated moments and ıts application to pearson-type distributions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsheorie and Verwandte Gebiete*, 66 (2): 173-183.

Glanzel, W. (1991). Characterization trough some conditional moments of pearson-type distributions and discrete analogues. *The Indian Journal of Statistics*, 53 (1): 17-24.

Gupta, R. C. ve Bradley, D. M. (2003). Representing the mean residual life in terms of the failure rate. *Mathematical and Computer Modelling*, 37 (12): 1271-1280.

Hogg, R. V. ve Craig, A. T. (1995). *Introduction to mathematical statistics*. Hong Kong: Higher Education Press.

Kotz, S. (1974). Characterizations of statistical distributions: a supplement to recent surveys. *International Statistical Review*, 42 (1): 39-65.

Lawless, J. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc.

Nair, N. U. ve Sankaran, P. G. (1991). Characterization of the pearson family of distributions. *IEE Transactions on Reliability*, 40 (1): 75-77.

Nair, N. U. ve Sankaran, P. G. (2000). On some reliability aspects of pearson family of distributions. *Statistical Papers*, 41 (1): 109-117.

Navarro, J., Franco, M. ve Ruiz, J. M. (1998). Characterization through moments of the residual life and conditional spacings. *The Indian Journal of Statistics*, 60 (1): 36-48.

Osaki, S. ve Li, X. (1988). Characterizations of gamma and negative binomial distributions. *IEE Transactions on Reliability*, 37 (4): 379-382.

Papathanasiou, V. (1995). A characterization of the pearson system of distributions and the associated orthogonal polynomials. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics,* 47 (1): 171-176.

Pearson, K. (1916). Mathematical contributions to the theory of evolution. xıx. second supplement to a memoir on skew variation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A,* 216 (1): 429-457.

Rausand, M. ve Hoyland, A. (2004). *System reliability theory*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc.

Sankaran, P. G. (1992). Characterization of Probability Distributions by Reliability Concepts. *Unpublished Doctoral Dissertation.* Cochin University of Science and Technology, Department of Statistics, India.

Sankaran, P. G., Nair, N. U. ve Sindu, T. K. (2003). A generalized pearson system useful in reliability analysis. *Statistical Papers*, 44 (1): 125-130.

Saraçoğlu, B. ve Çevik, F. (1995). *Matematiksel istatistik*. Ankara: Gazi Büro Kitabevi.

Shakil, M., Kibria, B. M. ve Singh, J. N. (2010). A new family of distributions based on the generalized pearson differantial equation with some applications. *Austrian Journal of Statistics*, 39 (3): 259-278.

Sindu, T. K. (2002). An Extended Pearson System Useful in Reliability Analysis. *Unpublished Doctoral Dissertation.* Cochin University of Science and Technology, Department of Statistic, India.

Stuart, A. ve Ord, J. K., (1987). *Kendall's advanced theory of statistics*. New York: Oxford University Press.

Şehirlioğlu, A. K. (2011). Pearson dağılış ailesi. *Yayınlanmamış Ders Notları.* Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İzmir.

Ünlü, M. (2013). Pearson dağılış ailesinin güvenilirlik analizinde kullanılması üzerine bir çalışma. *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi.* Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir.

Wasserman, G. (2002). *Reliability verification, testing, and analysis in engineering design*. New York: Marcel Dekker Inc.

**EK: Kübik Paydalı Pearson Diferansiyel Denkleminin Moment Denklemleri**

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

$$\int_r^s x^n\,(a_0 + a_1 x) f(x) dx = \int_r^s x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) f'(x) dx$$

Bu eşitliğin sağ tarafı için kısmi integral uygulanırsa,

$$x^n (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) f(x)|_r^s - n b_0 \int_r^s x^{n-1} f(x) dx$$

$$-(n+1) b_1 \int_r^s x^n f(x) dx - (n+2) b_2 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx - (n+3) b_3 \int_r^s x^{n+2} f(x) dx$$

Sol taraf;

$$\int_r^s x^n\,(a_0 + a_1 x) f(x) dx = a_0 \int_r^s x^n\, f(x) dx + a_1 \int_r^s x^{n+1} f(x) dx$$

O halde;

$$n b_0 \int_r^s x^{n-1} f(x) dx + [a_0 + (n+1) b_1] \int_r^s x^n f(x) dx$$

$$+[a_1 + (n+2) b_2] \int_r^s x^{n+1} f(x) dx + (n+3) b_3 \int_r^s x^{n+2} f(x) dx = 0$$

$$n b_0 \mu'_{n-1} + [a_0 + (n+1) b_1] \mu'_n + [a_1 + (n+2) b_2] \mu'_{n+1} + (n+3) b_3 \mu'_{n+2} = 0$$

$\mu'_0 = 1$ olmak üzere;

n=0 için; $[a_0 + b_1] + [a_1 + 2b_2]\mu'_1 + 3b_3\mu'_2 = 0$ (1.1.1)

n=1 için; $b_0 + [a_0 + 2b_1]\mu'_1 + [a_1 + 3b_2]\mu'_2 + 4b_3\mu'_3 = 0$ (1.1.2)

n=2 için; $2b_0\mu'_1 + [a_0 + 3b_1]\mu'_2 + [a_1 + 4b_2]\mu'_3 + 5b_3\mu'_4 = 0$ (1.1.3)

n=3 için; $3b_0\mu'_2 + [a_0 + 4b_1]\mu'_3 + [a_1 + 5b_2]\mu'_4 + 6b_3\mu'_5 = 0$ (1.1.4)

n=4 için; $4b_0\mu'_3 + [a_0 + 5b_1]\mu'_4 + [a_1 + 6b_2]\mu'_5 + 7b_3\mu'_6 = 0$ (1.1.5)