

# HİPERBOLİK PROFİLLİ DAİRESEL KANATLARIN PERFORMANS ANALİZİ VE OPTİMİZASYONU

**Cihat Arslantürk**

Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Atatürk Üniversitesi, 25240, Erzurum  
[carslan@atauni.edu.tr](mailto:carslan@atauni.edu.tr)

(Geliş/Received: 06.10.2010; Kabul/Accepted: 06.06.2012)

## ÖZET

Bu çalışmada, ısı iletim katsayıları sıcaklıkla değişen hiperbolik profile sahip dairesel kanatlar, bir-boyutlu ısı analiz ile optimize edilmiştir. Isı iletim katsayısının değişken olması yüzünden doğrusal olmayan tek boyutlu kanat denklemi, yarı-analitik bir metot olan homotopi analiz metodu (HAM) ile çözülerek kanat içindeki sıcaklık dağılımı elde edilmiştir. HAM algoritması, çözümün yakınsaklığı ve hassaslığını kontrol eden bir parametre içerdiğinden, sayısal yöntemden kaynaklanan hatanın minimize edilmesi mümkündür. Bu çözüm yardımıyla kanat verimi hesaplanmış, ancak bulunan ifadenin çok karmaşık olmasından dolayı kanat verimi, geometrik ve ısı problem parametrelerinin fonksiyonu olarak bir korelasyon denklemi ile ifade edilmiştir. Bu korelasyon denklemi optimizasyon hesaplarında kullanılarak, verilen ısı koşullarda ısı geçişini maksimum yapan kanat geometrisi belirlenmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Kanat, verim, homotopi analiz metodu, hiperbolik profil, değişken ısı iletim katsayısı

## PERFORMANCE ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF HYPERBOLIC PROFILE ANNULAR FINS

### ABSTRACT

The optimization of hyperbolic profile annular fins with variable thermal conductivity is performed based on one-dimensional heat transfer analysis. The homotopy analysis method (HAM) is used to solve the nonlinear one-dimensional heat transfer equation which is associated with variable thermal conductivity condition and obtained the temperature distribution within the fin. Since the HAM algorithm contains a parameter that controls the convergence and accuracy of the solution, its results can be verified internally by calculating the residual error. The fin efficiency of hyperbolic profile annular fins is obtained as a function of three problem parameters: thermo-geometric fin parameter, thermal conductivity parameter describing the variation of thermal conductivity and radii ratio. Since the efficiency expression is very complicated, the data from the present solutions is correlated for fin efficiency. Employing this correlation equation in optimization calculations, it has obtained fin geometry which maximizes the heat transfer rate for giving thermal conditions.

**Keywords:** Fin, efficiency, homotopy analysis method, hyperbolic profile, variable conductivity

### 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Genel olarak sıcak akışkan taşıyan borulardan çevre akışkanına olan ısı geçişini artırmak için dairesel kanatlar kullanılır [1]. Dairesel kanatlı borularla ilgili endüstriyel uygulamalara hava soğutmalı içten yanmalı motorlar, soğutma sistemlerinde kullanılan sıvı-gaz ısı değiştiricileri, nükleer atıkların depolandığı tanklar örnek olarak verilebilir [2]. Mokheimer [3] kanat ve çevre arasındaki taşınım

katsayısının konumla değiştiğini kabul ederek farklı profillere sahip dairesel kanatların ısı performanslarını araştırmıştır. Laor and Kalman [4] ısı taşınım katsayısının sıcaklıkla değiştiğini varsayarak dairesel kanatların verimlerini hesaplamışlar ve optimum tasarım parametrelerini belirlemişlerdir. Kundu and Das [5], kalınlıkları gövdeden kanat ucuna doğru azalan kanatların optimal kanat geometrilerini araştırmışlardır. Arauzo ve arkadaşları tarafından yapılan bir çalışmada,

yaklaşık bir analitik metot kullanılarak hiperbolik profilli dairesel kanatlar içindeki sıcaklık dağılımları belirlenmiştir [6]. Hiperbolik profilli iğne kanatların ısı analizi Diez ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [7]. Bütün bu çalışmalarda kanat malzemesinin ısı iletim katsayısının sabit olduğu kabul edilmiştir.

Uygulamada kullanılan kanatların ısı parametrelerinin değişken olduğu durumlar için literatürde çok sayıda araştırma bulunmaktadır. Yu and Chen [8], ısı iletim katsayısının sıcaklıkla doğrusal olarak değiştiğini kabul ederek, doğrusal olmayan kanat problemini diferansiyel dönüşüm metodu ile çözmüşlerdir. Değişken ısı iletim katsayılı konvektif düz kanatların ısı analizi farklı metotlar kullanılarak yapılmıştır [9-14]. Arslantürk [9] bu tip kanatlar içindeki sıcaklık dağılımını elde etmek için, Adomian ayrışım yöntemini kullanmış ve bu çözüm yardımıyla kanat verimleri için korelasyon denklemleri üretmiştir. Arslantürk tarafından yapılan bir başka çalışmada ise, değişken ısı iletim katsayılı dairesel kanatların optimal tasarımı yapılmış ve sonuçlar korelasyon denklemleri ile ifade edilmiştir [10]. Coskun and Atay [11] varyasyonel iterasyon metodu ve sonlu elemanlar metodu ile düz kanatların verimlerini incelemişlerdir. Konvektif düz kanatların verimlerini elde etmek için homotopi analiz metodu farklı araştırmacılar tarafından kullanılmıştır [12-13]. Aynı kanat problemi, Joneidi ve arkadaşları tarafından diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak çözülmüştür. Hem taşınım hem de ışımla ısı kaybeden kanatların iki boyutlu ısı analizi diferansiyel quadrature metodu ile gerçekleştirilmiştir [15]. Yang ve arkadaşları hiperbolik profilli kanat problemini ayrıştırma yöntemi ile çözmüş ve kanat verimlerini grafik olarak ifade etmişlerdir [16].

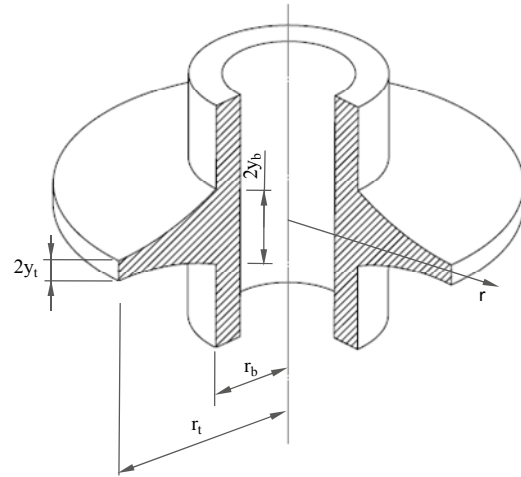
Homotopi analiz metodu (HAM), değişik alanlardaki doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan ve Liao tarafından önerilen genel bir yarı analitik yöntemdir [17-19]. HAM'ın birçok ısı geçişi probleminin çözümünde kullanıldığı çalışmalar literatürde mevcuttur [20-22]. Yöntem, çözümün hassaslığı ve yakınsaklığını kontrol eden bir parametre içerdiğinden diğer pertürbasyon yöntemlerine göre önemli bir ayrıcalığa sahiptir.

Bu çalışmada değişken ısı iletim katsayılı hiperbolik profilli dairesel kanatların sıcaklık dağılımını ifade eden nonlineer diferansiyel denklem HAM kullanılarak elde edilmiştir. Çözüm, bir sonsuz seri şeklinde elde edilmektedir. Bulunan bu seri çözüm yardımıyla, bu tip kanatların verimleri, problem parametreleri olan termo-geometrik kanat parametresi  $M$ , ısı iletim katsayısının sıcaklıkla değişimini ifade eden iletim katsayısı parametresi  $\beta$  ve kanat ucundaki yarıçapın kanat gövdesindeki yarıçapa oranı olan yarıçap oranı  $R_b$  cinsinden ifade edilmiştir. Elde edilen bu analitik ifade çok karmaşık ve uzun bir ifade olduğundan, kanat verimi problem parametrelerinin

geniş bir aralığında geçerli olan bir korelasyon denklemi ile ifade edilmiştir. Verilen ısı koşulları ve sabit bir kanat hacmi için optimum kanat geometrisi ve bu geometriye karşı gelen maksimum ısı geçişi bu korelasyon denklemleri yardımıyla saptanmıştır. Sonuçların bu alandaki tasarımcıya büyük yarar sağlayacağı düşünülmektedir.

## 2. KANAT PROBLEMİ (THE FIN PROBLEM)

Şekil 1'de şematik olarak gösterilen değişken profile sahip dairesel bir kanat göz önüne alınsın. Kanadın geometrisi dört boyutla tanımlanabilir: iç yarıçap  $r_b$ , iç yarı-kalınlık  $y_b$ , dış yarıçap  $r_o$ , ve dış yarı-kalınlık  $y_o$ . Kanat profili, yarıçap ile kanat kalınlığının  $y, r$ =sabit şeklindeki fonksiyona uyacak şekilde değişmektedir. Hiperbolik profilli dairesel kanat olarak isimlendirilen bu özel kanat yapısı, verilen sabit bir kanat malzemesi ile maksimum ısı geçişini sağlayacak profile sahip olması nedeniyle önemlidir [2].



Şekil 1. Hiperbolik profilli dairesel kanadın şematik gösterimi

Diferansiyel bir kanat elemanı için sürekli rejimde bir boyutlu enerji dengesi yazılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d}{dr} \left( 2\pi r y_r k \frac{dT}{dr} \right) dr - 2\pi r h (T - T_a) ds = 0 \quad (1)$$

Burada, ısı iletim katsayısının sıcaklıkla doğrusal olarak değiştiği kabul edilmektedir.

$$k = k_a [1 + \kappa(T - T_a)] \quad (2)$$

Denklem (3)'de tanımlanan boyutsuz parametreler kullanılır,

$$R = \frac{r}{r_t} \quad \beta = \kappa(T_b - T_a) \quad (3)$$

$$M = r_t \left( \frac{h}{k_a y_b} \right)^{0.5} \quad \theta = \frac{T - T_a}{T_b - T_a}$$

ve literatürde sıklıkla yapıldığı gibi,  $ds \approx dr$  olduğu kabul edilirse, boyutsuzlaştırılmış enerji denklemi ve denklemin sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \beta \left( \frac{d\theta}{dR} \right)^2 + \beta\theta \frac{d^2\theta}{dR^2} - \frac{R}{R_b} M^2 \theta = 0, \quad R_b < R < 1 \quad (4a)$$

$$\theta(R_b) = 1 \quad (4b)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=1} = 0 \quad (4c)$$

Diferansiyel denklem ve sınır koşulları, kanat içindeki sıcaklık dağılımının termo-geometrik kanat parametresi  $M$ , ısı iletim katsayısının sıcaklıkla değişimini ifade eden iletim katsayısı parametresi  $\beta$ , ve kanat ucundaki çapın kanat gövdesindeki çapa oranı olan yarıçap oranı  $R_b$ 'ye bağlı olduğunu göstermektedir.

### 3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU (HOMOTOPY ANALYSIS METHOD)

Liao, 1992 yılında topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanarak, homotopi analiz metodu olarak isimlendirdiği genel bir yarı-analitik yöntem önermiştir [17]. Yöntem doğrusal olmayan cebirsel, diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Homotopi analiz metodu, doğrusal olmayan bir problemi, sonsuz sayıda doğrusal probleme dönüştürür. HAM'ın sistematik olarak açıklandığı çalışmalar literatürde bulunmaktadır [18-19].

Aşağıdaki adi diferansiyel denklem göz önüne alınsın.

$$N[u(\tau)] = 0 \quad (5)$$

Burada,  $N$  bir nonlinear operatör,  $\tau$  bağımsız değişken ve  $u$  bağlı değişkeni temsil etmektedir. Basitlik için tüm sınır ve/veya başlangıç koşulları göz önüne alınmasın. Liao [17], genelleştirilmiş homotopi yöntemini kullanarak sıfırıncı-derece deformasyon denklemini aşağıdaki şekilde kurmuştur.

$$(1-p)L[\phi(\tau;p) - u_0(\tau)] = p\eta H(\tau)N[\phi(\tau;p)] \quad (6)$$

Burada  $p \in [0,1]$  gömme parametresi,  $\eta$  sıfırdan farklı bir yardımcı parametre,  $H(\tau) \neq 0$  bir yardımcı fonksiyon,  $L$  bir yardımcı doğrusal operatör,  $u_0(\tau)$ ,  $u(\tau)$ 'nin bir tahmini başlangıç çözümü ve  $\phi(\tau;p)$  bilinmeyen bir fonksiyondur. Açıkça görüleceği gibi, sırasıyla  $p=0$  ve  $p=1$  olduğu zaman, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\phi(\tau;0) = u_0(\tau) \text{ ve } \phi(\tau;1) = u(\tau) \quad (7)$$

Böylece  $p$  sıfırdan bire değişirken, çözüm, tahmini başlangıç çözümü  $u_0(\tau)$ 'dan, gerçek çözüm  $u(\tau)$ 'ye değişir.  $\phi(\tau;p)$  fonksiyonu  $p$ 'ye göre Taylor serisine açılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\phi(\tau;p) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\tau)p^m \quad (8)$$

Burada,

$$u_m(\tau) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(\tau;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (9)$$

Eğer yardımcı doğrusal operatör, tahmini başlangıç çözümü, yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon uygun şekilde seçilirse, denklem (8) ile verilen seri  $p=1$  için yakınsak olur. Böylece çözüm aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\tau) \quad (10)$$

Bu aşamada aşağıdaki vektör tanımlanır.

$$\vec{u}_n = \{u_0(\tau), u_1(\tau), K, u_n(\tau)\} \quad (11)$$

Denklem (6)'nın gömme parametresi  $p$ 'ye göre  $m$  kere türevi alınarak  $p=0$  değeri yerine konular ve ifade  $m!$ 'e bölünürse,  $m$ . mertbe deformasyon denklemini aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$L[u_m(\tau) - \chi_m u_{m-1}(\tau)] = \eta H(\tau) K_m (\vec{u}_{m-1}) \quad (12)$$

burada,

$$K_m (\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau;p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (13)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (14)$$

(12) ifadesi ile verilen yüksek-derece doğrusal deformasyon denkleminin, orijinal problemin sınır koşulları da kullanılarak, ardışık olarak çözülmesiyle  $u_m(\tau)$ 'in  $m$ . yaklaşımı elde edilir.

### 4. SICAKLIK DAĞILIMI (THE TEMPERATURE DISTRIBUTION)

Bu aşamada (4a)-(4c) denklemlerinin HAM ile çözümü açıklanacaktır. Lineer operatör (15) denklemini ile nonlinear operatör ise (16) denklemini ile tanımlanır.

$$L = \frac{d^2\theta}{dR^2} \quad (15)$$

$$N = \frac{d^2\theta}{dR^2} + \beta \left( \frac{d\theta}{dR} \right)^2 + \beta\theta \frac{d^2\theta}{dR^2} - \frac{R}{R_b} M^2 \theta \quad (16)$$

(4a)-(4c) denklemleri ile verilen problemin çözümü, bir temel fonksiyonlar seti cinsinden

$$\{R^n \mid n = 1, 2, 3, K\} \quad (17)$$

aşağıdaki seri şeklinde yazılabilir.

$$\theta(R) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n R^n \quad (18)$$

burada  $d_n$  daha sonra saptanacak olan katsayılar ve  $L[c_1 + c_2 R] = 0$  koşulu sağlanmalıdır.  $c_1$  ve  $c_2$  katsayıları, denklem (21) çözüldüğü zaman sınır koşulları kullanılarak elde edilecektir. Kabul edilen seri çözüme ve sınır koşullarına göre başlangıç yaklaşımı aşağıdaki şekilde olmalıdır.

$$\theta_0 = 1 \quad (19)$$

HAM algoritması; gömme parametresi  $h$ , yardımcı fonksiyon  $H$  (bu çalışmada  $H=1$  olarak seçilmiştir), başlangıç yaklaşımı  $\theta_0$  ve yardımcı lineer operatör  $L$ 'nin seçilmesinde büyük bir esneklik ve serbestlik sağlar. Bu esneklik çözüm serisinin yakınsaklığını sağlamak için önemli bir kolaylık getirmektedir. Burada başlangıç yaklaşımı, yardımcı lineer operatör ve yardımcı fonksiyon seçildiğinden dolayı, seri gömme parametresi cinsinden elde edilecektir. Böylece çözümün yakınsak olduğu gömme parametresi aralığının araştırılması gerekir.

(13) ve (16) denklemlerinden aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$K_m(\theta_{m-1}^p) = \theta_{m-1}''(R) - \frac{R}{R_b} M^2 \theta_{m-1}'(R) + \beta \sum_{i=0}^{m-1} [\theta_i(R) \theta_{m-1-i}''(R) + \theta_i'(R) \theta_{m-1-i}'(R)] \quad (20)$$

Böylece,  $m$ . derece deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$L[\theta_m(R) - \chi_m \theta_{m-1}(R)] = \eta K_m(\theta_{m-1}^p) \quad (21)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Bu aşamada (21) ile verilen  $m$ . derece deformasyon denkleminin lineer olduğu ve denklemin sağ tarafının bir önceki yaklaşımı içermesinden dolayı bilinen bir fonksiyon olduğu vurgulanmalıdır. Böylece, (19) denklemi ile seçilmiş olan başlangıç yaklaşımının kullanılmasıyla, ardışık olarak çözümler elde edilirler.

$$\theta_1(R) = -\frac{\eta M^2}{6R_b} (R^3 - R_b^3 - 3R + 3R_b) \quad (22)$$

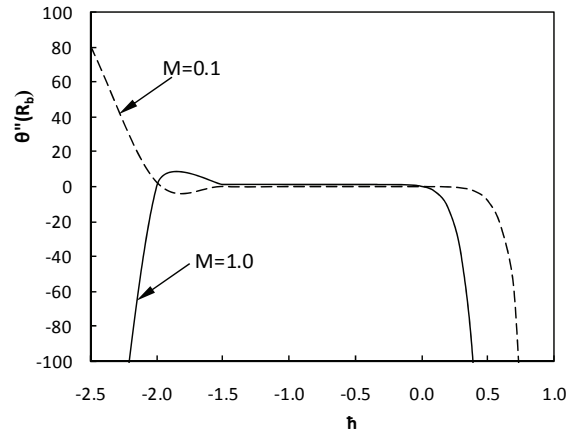
$$\begin{aligned} \theta_2(R) = & -\frac{\eta M^2}{360R_b^2} [(-8\eta M^2)R_b^6 \\ & + (-60 + 45\eta M^2 - 60\eta - 60\eta\beta)R_b^4 \\ & + (-30\eta M^2 R + 10\eta M^2 R^3)R_b^3 \\ & + (180 + 180\eta\beta - 90\eta M^2 + 180\eta)R_b^2 \\ & + (60\eta\beta R^3 - 180R(1 + \eta + \eta\beta) + 60\eta R^3 \\ & - 30\eta M^2 R^3 + 90\eta M^2 R + 48\eta M^2)R_b \\ & - 2\eta M^2 R^6 + 15\eta M^2 R^4 + 60R^3 - 48\eta M^2 R] \end{aligned} \quad (23)$$

J. mertebe yaklaşım yeterli doğrulukta bir çözüm olarak kabul edildiğinde (4a) denkleminin analitik çözümü aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\theta(R) = \sum_{m=0}^J \theta_m(R) \quad (24)$$

## 5. SERİ ÇÖZÜMÜNÜN DOĞRULUĞU VE YAKINSAKLIĞI (ACCURACY AND CONVERGENCE OF THE SERIES SOLUTION)

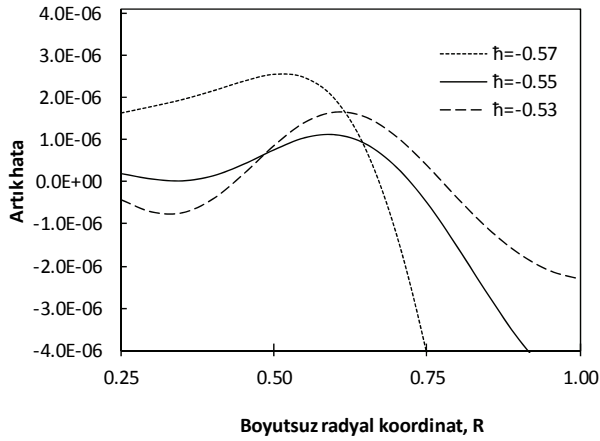
(24) denklemi problemin çözümünün analitik bir ifadesidir. Bu çözümün yakınsaklık aralığı ve yakınsaklık hızının belirlenmesi için, yardımcı parametre  $h$ 'nin çeşitli değerleri için çözümün incelenmesi gerekir. Bunun için çözümün ikinci türevinin  $R=R_b$ 'deki değerinin yardımcı parametre ile değişimi Şekil 2'de gösterilmiştir. Buna göre bu parametre değerleri için, çözümün yakınsaklık aralığının  $-1.5 < h < 0.0$  şeklinde olduğu görülmektedir.



Şekil 2.  $\beta = 0.3$  için  $h$ -eğrileri  $\theta''(R_b)$ 'nin 15. derece yaklaşımı

Şekil 3, seri çözümün 15. derece yaklaşımı olması durumu için artık hatanın aldığı değerleri göstermektedir. Uygun bir gömme parametresi değeri seçildiğinde artık hatanın sifıra yaklaştığı şekilden açıkça görülmektedir.

$$\text{Artık Hata} = (1 + \beta\theta_j')\theta_j'' + \beta(\theta_j')^2 - \frac{R}{R_b} M^2 \theta_j \quad (25)$$



Şekil 3. Denklem (4a) için artık hata eğrileri ( $\beta = 0.3$ ,  $R_b=0.25$  ve  $M= 1.0$ )

Sonlu sayıda terime sahip seri çözümünün doğruluğunu araştırmak için, problem ayrıca MAPLE programı kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. MAPLE programı bu sayısal çözüm için Richardson ekstapolasyonlu sonlu farklar metodunu (SFM) kullanmaktadır [23]. HAM çözümü ile bu sayısal çözümden elde edilen sonuçlar ve yalnız  $\beta=0$  için var olan tam çözüm, farklı ısı iletim parametresi değerleri için, Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablodan, sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyumun olduğu görülmektedir. Sayısal değerler karşılaştırıldığında en yüksek nonlineerliğin olduğu  $\beta = -0.3$  değeri için HAM ve SFM arasındaki farkın %0.05 değerinden küçük olduğu anlaşılmaktadır. Bulunan seri çözümdeki terim sayıları değiştirilerek yapılan incelemede, kanat içindeki sıcaklık dağılımı için, 15. derece yaklaşımın yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür. Bu yüzden kanattan olan ısı geçişinin ve

optimal geometrinin bulunması için yapılan hesaplamalar 15. derece yaklaşım ile bulunan analitik çözüm kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

## 5. BULGULAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

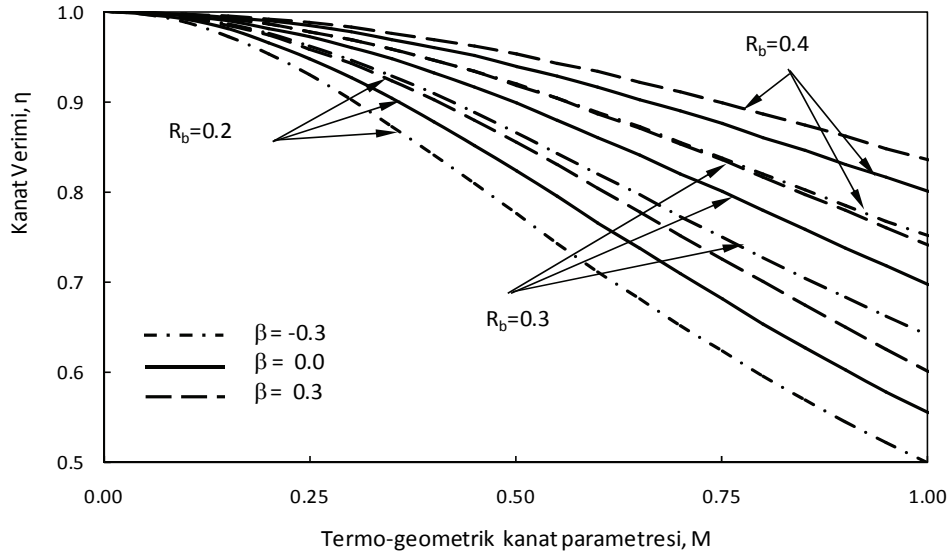
Kanat verimi, kanat yüzeylerinden çevreye transfer olan ısının, kanadın tüm yüzeylerinin gövde sıcaklığına eşit olması durumunda kanattan atılacak ısıya oranı olarak tanımlanır [24]. Bu verim tanımı ve denklem (2)'de verilen boyutsuz parametreler kullanılarak kanat verimi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\eta = \frac{Q}{Q_{ideal}} = \frac{2\pi h \int_{r_b}^{r_t} r(T - T_a) dr}{\pi h (r_t^2 - r_b^2)(T_b - T_a)} = \frac{2 \int_{R_b}^1 R \theta dR}{1 - R_b^2} \quad (26)$$

Şekil 4, ısı iletim katsayısı parametresi ve farklı yarıçap oranı değerleri için, kanat veriminin kanat parametresi ile değişimini göstermektedir. Şekilden görüldüğü gibi ısı iletim katsayısı parametresi kanat performansı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Denklem (26) ile hesaplanan kanat verimi analitik bir ifade olmasına karşın, son derece karmaşık ve çok uzun bir ifadedir. Bu nedenle, bir tasarımcı tarafından kolaylıkla kullanılabilmesi için; kanat verimi, bir korelasyon denklemi olarak ifade edilmiştir. Bu korelasyon denklemi; kanat verimini, termo-geometrik kanat parametresi  $M$ , ısı iletim parametresi  $\beta$  ve yarıçap oranı  $R_b$ 'nin fonksiyonu olarak (27a) denklemi ile verilmiştir. Denklem geçerli olduğu problem parametrelerinin aralıkları  $0.01 < M < 1.00$ ,  $0.2 < R_b < 1.0$  ve  $-0.3 < \beta < 0.3$  şeklindedir. Denklem (27a)'deki katsayıların değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1. Farklı çözüm yöntemleri için sıcaklık dağılımları ( $M=1.0$  ve  $R_b=0.25$ )

R	$\beta = -0.3$		$\beta = 0.0$			$\beta = 0.3$	
	SFM	HAM	SFM	HAM	Tam çözüm	SFM	HAM
0.25	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.30	0.926117	0.926127	0.942013	0.942014	0.942013	0.951764	0.951764
0.35	0.858168	0.858175	0.886849	0.886849	0.886849	0.905222	0.905222
0.40	0.795973	0.795976	0.834785	0.834785	0.834785	0.860680	0.860680
0.45	0.739351	0.739351	0.786057	0.786057	0.786057	0.818422	0.818422
0.50	0.688125	0.688124	0.740863	0.740864	0.740863	0.778714	0.778714
0.55	0.642128	0.642127	0.699372	0.699372	0.699372	0.741803	0.741804
0.60	0.601208	0.601207	0.661726	0.661726	0.661726	0.707921	0.707921
0.65	0.565231	0.565231	0.628050	0.628050	0.628050	0.677282	0.677283
0.70	0.534088	0.534087	0.598455	0.598455	0.598455	0.650093	0.650094
0.75	0.507694	0.507694	0.573049	0.573049	0.573049	0.626550	0.626551
0.80	0.486000	0.486000	0.551942	0.551942	0.551942	0.606844	0.606845
0.85	0.468993	0.468993	0.535252	0.535252	0.535252	0.591165	0.591166
0.90	0.456704	0.456704	0.523114	0.523114	0.523114	0.579708	0.579709
0.95	0.449217	0.449217	0.515686	0.515686	0.515686	0.572674	0.572675
1.00	0.446678	0.446678	0.513161	0.513161	0.513161	0.570279	0.570280



Şekil 4. Çeşitli problem parametreleri için kanat verimleri

Tablo 2. Kanat verimi için üretilen korelasyon denklemindeki katsayıların değerleri

A	B	C	D	E	F	G	H
0.47979	-0.28137	0.13944	-0.12928	14.90076	-1.21203	3.35786	0.33417
I	J	K	N	P	S	U	
-0.03922	-0.02329	-0.00343	-1.6011	5.9403	-0.18004	1.27342	

$$\eta = \frac{(Z_1 + Z_2)Z_3}{Z_4} \quad (27a)$$

Burada,

$$Z_1 = 1 + A\beta + B\beta^2 + C\beta \quad (27b)$$

$$Z_2 = DR_b + ER_b^2 + F \ln(M) + G \ln^2(M) \quad (27c)$$

$$Z_3 = H + IR_b + J \ln(M) + K \ln^2(M) \quad (27d)$$

$$Z_4 = L + NR_b + PR_b^2 + S \ln(M) + U \ln^2(M) \quad (27e)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıda verilen kanat verimi korelasyon denkleminin korelasyon katsayısı  $R^2 = 0.998$  değerine sahiptir. Kanattan çevreye olan ısı geçişi, boyutlu ve boyutsuz olarak sırasıyla (28a) ve (28b) denklemleriyle hesaplanır.

$$Q = 2\pi h \int_{r_b}^{r_t} r(T - T_a) dr \quad (28a)$$

$$q = \frac{Q}{2\pi h r_t^2 (T_b - T_a)} = \int_{R_b}^1 R \theta dR = \frac{\eta(1 - R_b^2)}{2} \quad (28b)$$

Verilen  $R_b$  and  $\beta$  değerleri için, Denklem (28b) ile verilen boyutsuz ısı geçişi yalnız kanat parametresi  $M$ 'in fonksiyonu olur. Bu fonksiyonu maksimum yapan termo-geometrik kanat parametresi, denklemin kanat parametresine göre türevi alınarak sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen yeni denklemin çözülmesiyle bulunur. Isı geçişini maksimum yapan

optimal kanat parametresi değeri (28b) denkleminde yerine yazılarak maksimum ısı geçiş hızı elde edilir. Bu optimizasyon prosedürü ile elde edilen sonuçlar Şekil 5'te gösterilmiştir. Şekil 5 hiperbolik profilli dairesel kanatların optimum tasarımında, tasarımcı için kullanışlı bir araç olacaktır.

## 6. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada, hiperbolik profile sahip değişken ısı iletim katsayılı dairesel kanatların ısıl analizi, yarı-analitik bir metot olan ve nonlinear problemlerin çözümünde kullanılan homotopi analiz metodu ile gerçekleştirilmiştir. Bu yöntem, çözümün yakınsaklığını kontrol eden bir parametre içerdiğinden diğer analitik yöntemlere göre önemli bir avantaja sahiptir. Kanat performansını temsil eden kanat verimi, problem parametreleri cinsinden elde edilmiş ve verim bu parametrelerin geniş bir aralığında geçerli olan bir korelasyon denklemi ile ifade edilmiştir. Bu korelasyon denklemi kullanılarak, kanattan geçen ısıyı maksimum yapan optimal parametre değerleri elde edilmiş ve grafik olarak sunulmuştur. Bu çalışmanın, bu alandaki tasarımcıya, uygun tasarım şartlarını seçmek için yardımcı olacak sonuçlar içerdiği düşünülmektedir.

## SEMBOLLER (NOMENCLATURE)

$h$	ısı taşınım katsayısı, [ $W m^{-2}K^{-1}$ ]
$\bar{h}$	yakınsaklık kontrol parametresi

H	yardımcı fonksiyon
HAM	Homotopi analiz metodu
k	ısı iletim katsayısı [ $W m^{-1}K^{-1}$ ]
L	yardımcı doğrusal operatör
M	termo-geometrik kanat parametresi ( $= r_i^2 h / k_a y_b$ )
N	doğrusal olmayan operatör
p	gömme parametresi
q	boyutsuz ısı geçiş hızı
Q	ısı geçiş hızı [ $W$ ]
r	radyal koordinat [m]
R	boyutsuz radyal koordinat
$R_b$	yarıçap oranı ( $= r_b / r_i$ )
s	yay uzunluğu [m]
SFM	Sonlu farklar metodu
T	sıcaklık [K]
u	bir bağlı değişken
y	kanat kalınlığı [m]

**Yunan Harfleri**

$\beta$	ısı iletkenliğinin değişkenliğini tanımlayan bir sabit [ $= \kappa(T_b - T_a)$ ]
$\eta$	kanat verimi
$\kappa$	ısı iletim katsayısı-sıcaklık eğrisinin eğimi [ $K^{-1}$ ]
$\theta$	boyutsuz sıcaklık [ $=(T - T_a) / (T_b - T_a)$ ]
$\theta_m$	m. derece yaklaşımı
$\tau$	bir bağımsız değişken
$\chi$	çift değerli fonksiyon

**Alt İndisler**

a	çevre akışkanı
b	gövde
t	uç

**KAYNAKLAR (REFERENCES)**

- Kraus, A.D., Aziz, A., ve Welty, J.R., Extended Surface Heat Transfer, **McGraw-Hill**, New York, 2001.
- Campo, A. ve Cui, J., "Temperature/heat analysis of annular fins of hyperbolic profile relying on the simple theory for straight fins of uniform profile", **Journal of Heat Transfer**, Cilt 130, 054501, 2008.
- Mokheimer, E. M.A., "Performance of annular fins with different profiles subject to variable heat transfer coefficient", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Cilt 45, No 17, 3631-3642, 2002.
- Laor, K. ve Kalman, H., "Performance and optimum dimensions of different cooling fins with a temperature dependent heat transfer coefficient", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Cilt 39, No 9, 1993-2003, 1996.
- Kundu, B. ve Das P.K., "Performance analysis and optimization of straight taper fins with variable heat transfer coefficient", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Cilt 45, No 24, 4739-4751, 2002.
- Arauzo, I., Campo, A ve Cortes, C., "Quick estimate of the heat transfer characteristics of annular fins of hyperbolic profile with the power series method", **Applied Thermal Engineering**, Cilt 25, No 4, 623-634, 2005.
- Diez, L.I., Campo, A. ve Cortes, C., "Quick design of truncated pin fins of hyperbolic profile for heat-sink applications by using shortened power series", **Applied Thermal Engineering**, Cilt 29, No 5-6, 815-821, 2009.
- Yu, L.T. ve Chen, C.K., "Optimization of circular fins with variable thermal parameters", **Journal of the Franklin Institute**, Cilt 336, No 1, 77-95, 1999.
- Arslanturk, C., "A decomposition method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", **International Communications in Heat and Mass Transfer**, Cilt 32, No 6, 831-841, 2005.
- Arslanturk, C., "Correlation equations for optimum design of annular fins with temperature dependent thermal conductivity", **Heat and Mass Transfer**, Cilt 45, No 4, 519-525, 2009.
- Coşkun, S.B. ve Atay, M.T., "Fin efficiency analysis of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity using variational iteration method", **Applied Thermal Engineering**, Cilt 28, No 17-18, 2345-2352, 2008.
- Inc, M., "Application of homotopy analysis method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", **Mathematics and Computers in Simulation**, Cilt 79, No 2, 189-200, 2008.
- Domairry, G. ve Fazeli, M., "Homotopy analysis method to determine the fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Cilt 14, No 2, 489-499, 2009.
- Joneidi, A.A., Ganji, D.D. ve Babaelahi, M., "Differential transformation method to determine fin efficiency of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity", **International Communications in Heat and Mass Transfer**, Cilt 36, No 7, 757-762, 2009.
- Malekzadeh, P., Rahideh, H. ve Setoodeh, A.R., "Optimization of non-symmetric convective-radiative annular fins by differential quadrature method", **Energy Conversion and Management**, Cilt 48, No 5, 1671-1677, 2007.
- Yang, Y.T., Chang, C.C. ve Chen C.K., "A double decomposition method for solving the annular hyperbolic profile fins with variable thermal conductivity", **Heat Transfer Engineering**, Cilt 31, No 14, 1165-1172, 2010.

17. Liao, S.J., “The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems”, PhD thesis, **Shanghai Jiao Tong University**, 1992.
18. Liao, S.J., “Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method”, **Chapman & Hall/CRC Press**, Boca Raton, 2003.
19. Liao, S.J., “On the homotopy analysis method for nonlinear problems”, **Applied Mathematics and Computation**, Cilt 147, No 2, 499–513, 2004.
20. Khani, F., Raji, A.M. ve Nejad, S.H., “A series solution of the fin problem with a temperature-dependent thermal conductivity”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Cilt 14, No 7, 3007–3017, 2009.
21. Khani, F., Raji, A.M. ve Nejad, S.H., “Analytical solution and efficiency of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Cilt14, No 8, 3327–3338, 2009.
22. Sajid, M., Ahmad, I., Hayat, T. ve Ayub, M., “Unsteady flow and heat transfer of a second grade fluid over a stretching sheet”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Cilt 14, No 1, 96–108, 2009.
23. Ascher, U. ve Petzold, L., **Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations**, **SIAM**, Philadelphia, 1998.
24. Incropera, F.P. ve DeWitt, D.P., **Introduction to Heat Transfer**, **Wiley**, New York, 1993.