Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi 4 (2) (2014) 109-149

Skaler Denklemlerde Kararlılık Analizi

Özlem Ak Gümüş

Adıyaman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adıyaman

akgumus@adiyaman.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, skaler denklemlerin kararlılığını belirlemek için kullanılan kararlılık metotları verilmiştir. Bu metotlar açıklanmış, bu metotlar ile ilgili olarak teoremlere yer verilmiştir. Sonuca kolay bir şekilde ulaşmak için kararlılık tabloları oluşturulmuştur. İlgili örnekler verilmiştir. Son olarak, çalışma boyunca üzerinde durulan kararlılık testleri karşılaştırılmış ve birbirlerine göre avantajı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Fark denklemleri, Skaler denklemler, Kararlılık testleri.

Stability Analysis in Scalar Equations

Abstract

In this paper, it is given stability methods used for indicating stability of scaler equations. These methods are explained, the theorems as regard with these methods are given. For reaching to the result easily, stability tables are constituted. Related examples are given. Finaly, stability methods which are given along this study are compared; and advantages relative to each other of these methods are investigated.

*Keywords: S*tability, Difference equations, Scalar equations, Stability test.

1. Giriş

Fark denklemlerinin kararlılığı üzerine şimdiye kadar çeşitli çalışmalar yapılmış ve bunun sayesinde de önemli bilgilere ulaşılmıştır. Acaba genel fark denklemlerinin özel bir hali olan ve "*skaler denklemler*" olarak da bilinen reel değerli homojen fark denklemlerinin kararlılığını belirleyen metotlar nelerdir? İşte bu sorunun cevabı çalışma konumuzu oluşturmuştur. Ayrıca bu metotların birbirine göre avantajı incelenmiştir. Bu metotlar, verilen skaler denklemi çözmeden skaler denklemin karakteristik polinomu yardımıyla, kararlılık testi için pratik bir hesaplama gerektirir [1-6,8]. Öncelikle çalışmamızla ilgili bazı tanımları hatırlayalım.

Tanım 1.1 $a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_0 \in R$ olmak üzere *k. mertebeden bir skaler denklem*

$$x(n+k) + a_{k-1}x(n+k-1) + a_{k-2}x(n+k-2) + \ldots + a_0 x(n) = 0 \tag{1.1}$$

formunda tanımlanır [7].

Tanım 1.2 (1.1) ile verilen skaler denklemin karakteristik polinomu

$$D_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

olmak üzere; $D_A(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine "*öz değer*" denir [7].

Tanım 1.3 (1.1) ile verilen denklemin asimtotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\lambda_i| < 1\ ;\ i = 1,2,..,n$ [7].

2. Skaler Denklemler için Kararlılık Testleri

Skaler denklemin karakteristik polinomu yardımıyla, kök yer teknikleri ve açık kök belirlenmesi etkili bir biçimde uygulanabilir. Burada, tablosal teknikler ile basit ve sistematik bir şema ortaya çıkarılmıştır., Hesaplama ve uygulama basitliklerinden dolayı, tablo teknikleri büyük oranda dikkat çekmiştir. Bu teknikler skaler denklemin karakteristik polinomunu kullanılarak ikinci dizi belirleyicilerinin hesaplamalarını gerektirir. O zaman kararlılık şartları tablodaki elemanlardan kolayca elde edilebilir [1-6,8]. Şimdi bu testleri inceleyelim.

2.1. Marden-Jury Testi

[3] de verilen bu kararlılık testinde bir skaler fark denkleminin karakteristik polinomu

$$D(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu test $[D_i(z)]_{i=o}^{n} = \{D_0(z) D_1(z) \cdots D_n(z)\}$ şeklinde bir polinom dizisi oluşturarak $D(z)$ nin kararlılığını inceler. Bu polinom dizisi;

$$D_{i+1}(z) = d_{i,0}D_i(z) - d_{i,n-i}D_i^*(z) \tag{2.1.2}$$

bağıntısı kullanılarak oluşturulur. $D_i(z)$; $(n-i)$. mertebeden polinomu $D_i(z)=d_{i,0}+d_{i,1}z+\cdots+d_{i,n-i}z^{n-i}$ olmak üzere ve $D_i^*(z)$, $D(z)$ nin karşılıklı polinomu olup $D_i^*(z)=z^{n-i}D_i(z^{-1})=d_{i,n-i}+d_{i,n-i-1}z+\cdots+d_{i,0}z^{n-i}$ şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda $D_0(z)=D^*(z)=d_n+d_{n-1}z+\cdots+d_0z^n$ şeklindedir. Denklem (2.1.2) kullanılarak dizilerin elemanları ile olan ilişkisi göz önüne alınırsa; $i=0,1,2,\ldots,n$ olmak üzere;

$$D_{i+1}(z)=d_{i,0}(d_{i,0}+d_{i,1}z+d_{i,2}z^2+\ldots+d_{i,n-i}z^{n-i})-d_{i,n-i}(d_{i,n-i}+d_{i,n-i+1}z+\ldots+d_{i,1}z^{n-i-1}+d_{i,0}z^{n-i})$$

$$D_{i+1}(z)=d_{i,0}^2-d_{i,n-i}^2+(d_{i,0}d_{i,1}-d_{i,n-i}d_{i,n-i+1})z+\ldots+(d_{i,0}d_{i,n-i+1}-d_{i,n-i}d_{i,1})^{n-i+1}z^{n-i+1}$$

yazılabilir. Temel şart aşağıdaki teoremde olduğu gibi verilebilir.

Teorem 2.1.1 (2.1.1) ile verilen $D(z)$ polinomunun tüm sıfırlarının birim çember içine düşmesi için $\Leftrightarrow \delta_i=d_{i,0}>0,\quad i=1,2,\cdots,n$ [3].

2.2 Hu'nun Kararlılık Testi

Bu test yardımıyla oluşturulan tabloda Marden-Jury Testinde kullanılan polinomlar dizisiyle basit ilişkili $\{S_i(z)\}_{i=0}^n$ simetrik polinomlardan oluşan yeni bir dizi tanımlanmıştır [3]. Yeni polinom düzenlemesi ile oluşturulan bu tablo uygulaması, iki boyutlu ve çok boyutlu sistemlerin kararlılığını test edecek sade ve sistemli bir tekniğin bulunmasına yol açmıştır.

$\{S_i(z)\}_{i=0}^n$ simetrik poliomların yeni bir dizisi,

$$\{S_i(z)\}_{i=0}^n=\{S_0(z)S_1(z)\cdots S_n(z)\} \tag{2.2.1}$$

verilsin. $S_i(z)$, $(n-i)$. mertebeden polinomu; $S_i(z)=S_{i,0}+S_{i,1}z+\cdots+S_{i,n-i}z^{n-i}$ ile $S_{i,j}=S_{i,n-i-j},\quad j=0,1,\cdots,Int((n-1)/2)$ şeklinde tanımlanır. Burada Int(.), tam değer fonksiyonudur. İlk iki $\{S_i(z)\}_{i=0}^n$ polinomu;

$$S_0(z)=D_0(z)+D_0^*(z) \tag{2.2.2}$$

ve

$$S_1(z)=D_1(z)+D_1^*(z) \tag{2.2.3}$$

olarak verilir ki, burada $D_0(z), D_0^*(z), D_1(z)$ ve $D_1^*(z)$ denklem (2.1.2) ile verilen $\{D_i(z)\}_{i=0}^n$ Marden Jury dizisi polinomlarıdır. $\{D_i(z)\}_{i=0}^n$ deki polinomlar yardımıyla $S_{i+1}(z),\ i>0$ simetrik polinomları

$$S_{i+1}(z)=(1+z^{-1})\delta_i S_i(z)+z^{-1}\mu_i S_{i-1}(z) \tag{2.2.4}$$

bağıntısı ile hesaplanır. Buradaki katsayılar aşağıdaki şekilde verilir:

$$\delta_i = S_{i-1,0}q_{i-1} = d_{i,0}$$
$$q_i = 2\delta_i - S_{i,0} = d_{i,0} - d_{i,n-i}$$
$$\mu_i = -S_{i,0}q_{i-1}$$

Teorem 2.2.1 $D_{k+1}(z)=d_{k,0}D_k(z)+d_{k,n-k}D_k^*(z)$ ve $D_{k+1}^*(z)=z^{-1}(d_{k,0}D_k^*(z)-d_{k,n-k}D_k(z))$ olmak üzere, Denklem (2.2.1)'de verilen $\{D_i(z)\}_{i=0}^n$ Marden Jury dizisinin polinomları arasındaki bağıntı

$$S_i(z)=D_i(z)+D_i^*(z) \tag{2.2.5}$$

şeklindedir [3].

Bundan sonra $\{S_i(z)\}_{i=0}^n$ simetrik polinomların dizisini oluşturup yeni bir tablo vereceğiz. Yeni tablonun elemanlarıyla ilgili uygun kararlılık koşulları da verilecektir.

Tablo 2.1. Hu'nun Kararlılık Tablosu

Satır	z^0	z^1		z^{m_k}	z^{m_k+1}		z^{m_0}
0	$s_{0,0}$	$s_{0,1}$	$\cdots$	s_{0,m_k}	$s_{0,m_{k+1}}$	$\cdots$	s_{0,m_0}
1	$s_{1,0}$	$s_{1,1}$	$\cdots$	s_{1,m_k}	$s_{1,m_{k+1}}$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
k^*	$s_{k,0}$	$s_{k,1}$	$\cdots$	s_{k,m_k}	$(s_{k,m_{k+1}})$		
k+1	$s_{k+1,0}$	$s_{k+1,1}$	$\cdots$	$s_{k+1,m_{k+1}}$			
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$					
n-3	$s_{n-3,0}$	$s_{n-3,1}$					
n-2	$s_{n-2,0}$	$s_{n-2,1}$					
n-1	$s_{n-1,0}$	$(s_{n-1,1})$					
N	$s_{n,0}$						

İlk satırın elemanları satır “0”, denklem (2.2.2) de verilen $S_0(z)$ polinomunun katsayıları olup $S_{0,j} = d_{0,j} + d_{0,n-j}$, $j = 0,1,\cdots,m_0$ şeklindedir. İkinci satırın elemanları, satır “1” denklem (2.2.3) de verilen $S_1(z)$ nin katsayılarıdır ve aşağıdaki formla hesaplanır.

$$\begin{aligned} S_1(z) &= d_{0,0}D_0(z) + d_{0,n}D_0^*(z) + z^{-1}(d_{0,0}D_0^*(z) - d_{0,n}D_0(z)) \\ &= d_{0,0}(D_0(z) + z^{-1}D_0^*(z)) - d_{0,n}(z^{-1}D_0(z) - D_0^*(z)) \end{aligned}$$

$D_0(z)$ nin katsayılarını kullanarak $S_{1,j} = d_{0,0}(d_{0,j} + d_{0,n-j-1}) - d_{0,n}(d_{0,j+1} + d_{0,n-j}),\ j = 0,1,\cdots m_1$ yazılabilir. Sonraki satırdaki elemanlar aynı şekilde Teorem 2.2.1 de verilen bağıntı yardımıyla hesaplanabilir. Buna göre genel bağıntı ve katsayılar

$$S_{i,j} = \delta_{i-1}(S_{i-1,j} + S_{i-1,j+1}) + \mu_{i-1}S_{i-2,j+1}\ ,\ \ i = 2,3,\cdots,n,\ \ j = 0,1,\cdots m_i,$$

$$m_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-i) & ,n-i\ çift \\ \frac{1}{2}(n-i-1) & ,n-i\,tek \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad m_i = Int[\frac{1}{2}(n-i)]$$

şeklindedir. Tablo 2.1, $m_i = Int[\frac{1}{2}(n-i)]$ ile birlikte $S_i(z),\ i = 0,1,\cdots,n$ polinomunun katsayılarını yarıya düşürerek oluşturulan simetrik polinomların basit bir şeklidir. Yinede *n-i* tek sayılı satırlar için $S_{i,m_{i+1}}$ elemanları bir sonraki satırın elemanı olan $S_{i+1,m_{i+1}}$ hesaplanmasında gereklidir. Bu nedenle biz onları sol elemanların kopyası olduğunu belirtmek için tabloda parantez içerisine yerleştirdik. Matematiksel olarak S_{i,m_i} $S_{i,m_{i+1}} = S_{i,m_i}$, $n-i\ \ tek\ \ i = 1,2,\cdots n-1$ şeklinde ifade edilebilir.

Tablo 2.1 in yapısı sürekli zaman sistemleri için kullanılan Routh Tablosuna çok benzer; şayet *n* tek ise $m_1 = m_0 = \frac{1}{2}(n-1)$ dir. Yani tablonun ilk iki satırı aynı sayı elemanlarına sahiptirler. Böylece elemanların satırı her sırada bir azalacaktır. Şayet *n* çift ise $m_0 = \frac{1}{2}n$ dir. Elemanların sayılarının azalması satır 1 den başlayacaktır. Son iki satır olan *n-1* ve n hep bir elemana sahip olacaktır. Buradan *(n-i)* tek sayılı satırlardaki $(S_{i,m_{i+1}})$ kopyalanmış elemanları içermediği anlaşılır. Aşağıdaki teorem yeni tabloya uyumlu olarak denk kararlılık koşulları vermektedir.

Teorem 2.2.2 $d_n > 0$ ile birlikte $D(z)$ nin bütün sıfırlarının birim çember içine düşmesi için $\Leftrightarrow$ $D(1) > 0, (-1)^n D(-1) > 0$ ve $S_{i,0} > 0,\ i = 1,2,\cdots n-1$ veya $S_{i,0} > 0\ ,\ i = 1,2,\cdots,n-2\ ve\ q_{n-2} > 0$ veya $S_{i,0} >\ ,q_i > 0\ i = 1,3,\cdots,n-2,\ n\ tek$ veya $S_{i,0} > 0\ ,i = 0,2,\cdots,n-2\ ;\ q_0 < 0\ ve\ q_i > 0;\ i = 2,4,\cdots,n-2,\ n\ çift$

denk olan şartlardan biri yerine getirilmelidir.

2.3 Jury Testi I

$F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k$, $\Re$ üzerinde *n*. dereceden polinom dizisi olsun. $\{,\}$ varyasyonu reel sayılar dizisindeki farklı işaretlerin sayısını göstersin. $F(z)$ nin karşılıklı polinomu $F^{\neq}(z)$ olmak üzere, eğer $F(z) = F^{\neq}(z)$ ise $F(z)$ nin simetrik olduğu söylenebilir. $F(z) \in \mathbb{C}_n(z)$ olduğunda $F^{\neq}(z) = z^n \overline{F}(1/z)$ dir. Burada $\overline{F(z)}$, $F(z)$ nin eşleniğidir. Biz; $F(z)$, reel katsayılı polinomu üzerinde çalıştığımızda katsayılar değişmez.

$$F(z) = F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\ ,\ F(1) \in \Re \text{ ve } F(1) \neq 0 \tag{2.2.6}$$

olsun. Reel durumda, genelliği kaybetmeden $a_n > 0$ olduğunu varsayalım. $F(z)$ nin kararlılığının belirleme formunun incelenmesinde azalan mertebeli polinomların bir dizisi bulunur. JT ve daha sonra MJT de kullanılan polinom dizisi $\{F_i(z)\}_{i=0}^{n}$ şeklinde tanımlansın. Burada $F_i(z) = \sum_{k=0}^{i} a_k^{(i)} z^k$ formunda elde edilen polinom dizisi, $\{F_i(z)\}_{i=0}^{n}$ ve $F(\lambda) = a_n^{(n)}\lambda^n + a_{n-1}^{(n)}\lambda^{(n-1)} + a_{n-2}^{(n)}\lambda^{(n-2)} + \ldots + a_2^{(n)}\lambda^2 + a_1^{(n)}\lambda + a_0^{(n)}$ karakteristik polinomunun katsayıları yardımıyla aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz [7].

Tablo 2. 2. Jury'nin Kararlılık Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	...	λ^k	...	λ^{n-2}	λ^{n-1}	λ^n
1	$a_0^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	...	$a_k^{(n)}$	...	$a_{n-2}^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n)}$	$a_n^{(n)}$
2	$a_n^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n)}$	$a_{n-2}^{(n)}$	...	$a_{n-k}^{(n)}$	...	$a_2^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_0^{(n)}$
3	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_2^{(n-1)}$	...	$a_k^{(n-1)}$	...	$a_{n-2}^{(n-1)}$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	
4	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$	$a_{n-3}^{(n-1)}$	...	$a_{n-k-1}^{(n-1)}$	...	$a_1^{(n-1)}$	$a_0^{(n-1)}$	

5	$a_0^{(n-2)}$	$a_1^{(n-2)}$	$a_2^{(n-2)}$	$\dots$	$a_k^{(n-2)}$	$\dots$	$a_{n-2}^{(n-2)}$
6	$a_{n-2}^{(n-2)}$	$a_{n-3}^{(n-2)}$	$a_{n-4}^{(n-2)}$	$\dots$	$a_{n-k-2}^{(n-2)}$	$\dots$	$a_0^{(n-2)}$
⋮		⋮	⋮	⋮			
2n-5	$a_0^{(3)}$	$a_1^{(3)}$	$a_2^{(3)}$		$a_3^{(3)}$		
2n-4	$a_3^{(3)}$	$a_2^{(3)}$	$a_1^{(3)}$		$a_0^{(3)}$		
2n-3	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$				

Teorem 2.3.1 $F(z)$ nin asimtotik kararlı olması için;

i) F(1)>0 ve $(-1)^n F(-1)>0$

ii) $\left|a_0^{(n-1)}\right|>\left|a_{n-1}^{(n-1)}\right|>0,\ \left|a_0^{(n-2)}\right|>\left|a_{n-2}^{(n-2)}\right|>0,\dots,\ \left|a_0^{(2)}\right|>\left|a_2^{(2)}\right|>0$

şartları sağlanmalıdır. Burada $a_k^{(n-1)}$ ve $a_k^{(n-2)}$ katsayıları;

$$a_k^{(n-1)}=\begin{vmatrix} a_k^{(n)} & a_n^{(n)} \\ a_{n-k}^{(n)} & a_0^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad a_k^{(n-2)}=\begin{vmatrix} a_k^{(n-1)} & a_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n-k-1}^{(n-1)} & a_0^{(n-1)} \end{vmatrix}, \ \dots$$

$$k=0,1,\dots,n-1 \qquad\qquad k=0,1,\dots,n-2$$

ile hesaplanır [7].

2.4. Jury Testi II (Raible Tablosu)

Jury bu test ile verilen bir skaler denklemin karakteristik polinomu yardımıyla birim çember içine ve dışına düşen köklerin hesaplanabileceğini, böylece başka bir irdelemeye gerek kalmadan asimtotik kararlılığın tesbit edilebileceği üzerinde durmuştur [6].

$F_n(z)=F(z)$, (2.2.6) denklemi ile verilen reel katsayılı polinomu yardımıyla elde edilen azalan dereceli polinomun katsayıları

$$F_{n-1}:\ a_{n-1}^{(n-1)}=a_n^{(n)}-\frac{a_0^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_0^{(n)},\ a_{n-2}^{(n-1)}=a_{n-1}^{(n)}-\frac{a_0^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_1^{(n)},..,\ a_0^{(n)}=a_1^{(n)}-\frac{a_0^{(n)}}{a_n^{(n)}}a_{n-1}^{(n)}$$

$$F_{n-2}:a_{n-2}^{(n-2)}=a_{n-1}^{(n-1)}-\frac{a_0^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_0^{(n-1)},a_{n-3}^{(n-2)}=a_{n-2}^{(n-1)}-\frac{a_0^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_1^{(n-1)},\dots a_0^{(n-1)}=a_1^{(n-1)}-\frac{a_0^{(n-1)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}a_{n-2}^{(n-1)}$$

⋮

$$F_1 : a_1^{(1)} = a_2^{(2)} - \frac{a_0^{(2)}}{a_2^{(2)}} a_0^{(2)},\ a_1^{(1)} = a_2^{(2)} - \frac{a_0^{(2)}}{a_2^{(2)}} a_0^{(2)},\ a_0^{(1)} = a_1^{(2)} - \frac{a_0^{(2)}}{a_2^{(2)}} a_1^{(2)},$$

$$F_0 : a_0^{(0)} = a_1^{(0)} - \frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}} a_0^{(0)}$$

ile verilir. Raible tablosunun her bir satırı bir polinomu simgeler. $F(z)$ polinomunun birim çember içindeki ve dışındaki kök sayılarını sırasıyla $i(F)$ ve $\circ(F)$ şeklinde gösterelim. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4.1. Raible tablosunun ilk kolonunda sıfır olmadığı düzenli durum için;

(1) Eğer $a_n^{(n)} > 0$ ise , İ(F) = $+\{ a_{n-1}^{(n-1)}, a_{n-2}^{(n-2)}, \ldots, a_1^{(1)}, a_0^{(0)} \}$

$$\circ(F) = -\{ a_{n-1}^{(n-1)}, a_{n-2}^{(n-2)}, \ldots, a_1^{(1)}, a_0^{(0)} \}$$

(2) Eğer $a_n^{(n)} < 0$ ise , $\dot{I}(F) = -\{ a_{n-1}^{(n-1)}, a_{n-2}^{(n-2)}, \ldots, a_1^{(1)}, a_0^{(0)} \}$

$$\circ(F) = +\{ a_{n-1}^{(n-1)}, a_{n-2}^{(n-2)}, \ldots, a_1^{(1)}, a_0^{(0)} \}$$

ile kök sayıları hesaplanır [6].

Teorem 2.4.2 $F(z)$ nin asimtotik kararlı olması için $\Leftrightarrow$ $i(F) = n$ olmasıdır [6].

2.5 Reel MJT (Modifiye Edilmiş Jury Testi)

JT'nin modifiye edilmiş versiyonu ilk kez *Schur-Cohn* minörleri, daha sonra iç determinantları elde etmek amacıyla kullanılmıştır [1]. $2x2$ boyutunda matrisin determinant hesabı ise kararlılığın belirlenmesinde kolaylık sağlar. *Reel-MJT* aşağıdaki polinom dizisini kullanarak oluşturulabilir.

$$F_i(z) = \begin{cases} -[a_0^{(n)} F_n(z) - a_n^{(n)} F_n^{\neq}(z)] & ,i = n-1 \\ [a_0^{(n-1)} F_{n-1}(z) - a_{n-1}^{(n-1)} F_{n-1}^{\neq}(z)] & ,i = n-2 \\ \dfrac{1}{a_0^{(i+2)}} [a_0^{(i+1)} F_{i+1}(z) - a_{i+1}^{(i+1)} F_{i+1}^{\neq}] & ,i = n-3, n-4, \ldots, 0 \end{cases} \qquad (2.2.7)$$

Elde edilen her polinom, bir önceki polinomun katsayılarına bağlı olarak aşağıdaki şekilde elde edilir. $F_n(z)$ ve $F_n^{\neq}(z)$ karşılıklı polinomu

$$F_n(z) = a_n^{(n)} z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_2^{(n)} z^2 + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

$$F_n^{\neq}(z) = a_0^{(n)} z^n + a_1^{(n)} z^{n-1} + a_2^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_{n-2}^{(n)} z^2 + a_{n-1}^{(n)} z + a_n^{(n)}$$

olmak üzere $F_{n-1}(z) = a_{n-1}^{(n-1)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n-1)} z^{n-2} + \ldots + a_n^{(n-1)} z^2 + a_1^{(n-1)} z + a_0^{(n-1)}$ polinomunu elde edelim.

$$F_{n-1}(z) = -a_0^{(n)} a_n^{(n)} z^n - a_0^{(n)} a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} - a_0^{(n)} a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} - \ldots - a_0^{(n)} a_2^{(n)} z^2 - a_0^{(n)} a_1^{(n)} z - (a_0^{(n)})^2$$

$$+ a_0^{(n)} a_n^{(n)} z^n + a_1^{(n)} a_n^{(n)} z^{(n-1)} + a_2^{(n)} a_n^{(n)} z^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2}^{(n)} a_n^{(n)} z^2 + a_{n-1}^{(n)} a_n^{(n)} z + (a_n^{(n)})^2$$

$$F_{n-1}(z) = [a_1^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_{n-1}^{(n)}] z^{n-1} + [a_2^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_{n-2}^{(n)}] + \ldots +$$

$$[a_{n-2}^{(n)} . a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_2^{(n)}] z^2 + [a_{n-1}^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_1^{(n)}] z + \left([a_n^{(n)}]^2 - [a_0^{(0)}]^2 \right)$$

olup katsayılar,

$$a_{n-1}^{(n-1)} = a_1^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_{n-1}^{(n)}$$

$$a_{n-2}^{(n-1)} = a_2^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_{n-2}^{(n)}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_2^{(n-1)} = a_{n-2}^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_2^{(n)}$$

$$a_1^{(n-1)} = a_{n-1}^{(n)} a_n^{(n)} - a_0^{(n)} a_1^{(n)}$$

$$a_0^{(n-1)} = [a_n^{(n)}]^2 - [a_0^{(n)}]^2$$

şeklinde bulunur. Benzer işlemlerle

$$F_{n-2}(z) = a_{n-2}^{(n-2)} z^{n-2} + \ldots + a_2^{(n-2)} z^2 + a_1^{(n-2)} z + a_0^{(n-2)}$$

polinomunun katsayıları

$$a_{n-2}^{(n-2)} = a_0^{(n-1)} a_{n-2}^{(n-1)} - a_{n-1}^{(n-1)} a_1^{(n-1)}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_2^{(n-2)} = a_0^{(n-1)} a_2^{(n-1)} - a_{n-1}^{(n-1)} a_{n-3}^{(n-1)}$$

$$a_1^{(n-2)} = a_0^{(n-1)} a_1^{(n-1)} - a_{n-1}^{(n-1)} a_{n-2}^{(n-1)}$$

$$a_0^{(n-1)} = (a_0^{(n-1)})^2 - (a_{n-1}^{(n-1)})^2$$

elde edilir. Aşağıdaki çizelge üzerinde, katsayılar arasındaki ilişkiyi daha açık bir şekilde görebiliriz.

Tablo 2.3. Modifiye Edilmiş Jury Tablosu

$F_n:$	$a_n^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n)}$	$a_{n-2}^{(n)}$	$a_{n-3}^{(n)}$	$\cdots$	$a_3^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_0^{(n)}$
	$a_0^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$		$a_{n-3}^{(n)}$	$a_{n-2}^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n)}$	$a_n^{(n)}$
$F_{n-1}:$	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_2^{(n-1)}$	$a_3^{(n-1)}$	$\cdots$	$a_{n-3}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	
	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$a_{n-2}^{(n-1)}$	$a_{n-3}^{(n-1)}$	$a_{n-4}^{(n-1)}$		$a_2^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_0^{(n-1)}$	
$F_{n-2}:$	$a_0^{(n-3)}$	$a_1^{(n-3)}$	$a_2^{(n-3)}$	$a_3^{(n-3)}$	$\cdots$	$a_{n-3}^{(n-3)}$			
	$a_{n-3}^{(n-3)}$	$a_{n-4}^{(n-3)}$	$a_{n-5}^{(n-3)}$	$a_{n-6}^{(n-3)}$		$a_0^{(n-3)}$			
$F_{n-3}:$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$F_3:$	$a_0^{(3)}$	$a_1^{(3)}$	$a_2^{(3)}$	$a_3^{(n)}$					
	$a_3^{(3)}$	$a_2^{(3)}$	$a_1^{(3)}$	$a_0^{(3)}$					
$F_2:$	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$						
	$a_2^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_0^{(2)}$						
$F_1:$	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$							
	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(1)}$							
$F_0:$	$a_0^{(0)}$								

$\Delta_i = a_0^{(n-i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$ omak üzere katsayılara bağlı Δ_i, *Schur-Cohn* minörleri ve $\Delta_i^{\pm}$, $i = 1,2,\ldots,n$ iç determinantlar

$$\Delta_i^{\pm} = \begin{cases} a_n^{(n)} \pm a_0^{(n)} & i = 1 \\ a_0^{(n-1)} \pm a_{n-1}^{(n-1)} & i = 2 \\ \dfrac{a_0^{(n-i+1)} \pm a_{n-i+1}^{(n-i+1)}}{\Delta_{i-2}^{\mp}} & i = 3,4,\ldots,n \end{cases} \tag{2.2.8}$$

ile verilir. $F(z)$ nin kararlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki gibi belirtilebilir.

Teorem 2.5.1. (2.2.6) da verilen $F(z) \in \Re_n[z]$ polinomu için $F(1) > 0$, $(-1)^n F(-1) > 0$ olmak üzere;

a) $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$

b) n çift, $\Delta_1^{\pm} > 0, \Delta_3^{\pm} > 0, ..., \Delta_{n-1}^{\pm} > 0$,

c) n tek, $\Delta_2^{\pm} > 0, \Delta_4^{\pm} > 0, ..., \Delta_{n-1}^{\pm} > 0$,

yukarıdaki denk olan şartlardan biri yerine getirilmelidir [1].

2.6 Reel-BT (Bistritz Testi)

[2] de verilen bu kararlılık metodunda BT'de kullanılan polinom dizisi $\{T_i(z)\}_{i=0}^{n}$ ile gösterilsin. $T_i(z) = \sum_{k=0}^{i} t_k^{(i)} z^k$ ile tanımlanan dizinin şematik olarak gösterilmesinde ilk satır *n*. mertebeden polinom, ikinci satır *(n-1)*. dereceden polinomdur ve azalan mertebeyle devam eder.

Bistritz $F(z)$ kararlılığını aşağıdaki şekilde verilen $\{T_i(z)\}_{i=0}^{n}$ simetrik polinom dizisi kullanarak araştırdı. Reel-BT için

$$T_i(z) = \begin{cases} F_n(z) + F_n^{\neq}(z) & i = n \\ \dfrac{F_n(z) - F_n^{\neq}(z)}{z-1} & i = n-1 \\ \dfrac{\delta_{i+2}(z+1)T_{i+1}(z) - T_{i+2}(z)}{z} & i = n-2, n-3, \ldots, 0 \end{cases} \tag{2.2.9}$$

formuna sahibiz. Ayrıca;

$$\delta_{i+2} = \frac{T_{i+2}(0)}{T_{i+1}(0)} = \frac{t_0^{(i+2)}}{t_0^{(i+1)}}, \qquad i = n-2, n-3, \ldots, 0 \tag{2.2.10}$$

geçerlidir. $T_i(z)$ simetrik olduğu için $t_k^{(i)} = t_{i-k}^{(i)}$, $k = 0, 1, \ldots, i$ yazılabilir. O halde aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.6.1 Denklem (2.2.6) da verilen $F(z) \in \Re_n[z]$ polinomu Teorem 2.5.1. deki şartlar yerine getirildiğinde kararlıdır. Ayrıca, $T_i(0) = t_0^{(i)} \neq 0$, $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ ve $v_n = var\{T_n(1), T_{n-1}(1), \ldots, T_0(1)\} = 0$ şeklindedir.

(2.2.9) numaralı denklemden $F(z)$ kök dağılımının belirlenmesi için bir çizelge metodu geliştirilebilir. Bistritz'in belirlediği determinant kuralı;

$$t_k^{(i)} = \frac{1}{t_0^{(i+1)}} \begin{bmatrix} t_0^{(i+2)} & t_{k+1}^{(i+2)} \\ t_0^{(i+1)} & t_k^{(i+1)} + t_{k+1}^{(i+1)} \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,...,i$$

olup $\{T_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizisi için aşağıda tanımlanan çizelge formu düzenlenir. Ayrıca $\{T_i(z)\}_{i=0}^{n}$ polinomları simetrik olduğundan dolayı sadece girişlerin yarısı değerlendirilir [2].

Tablo 2.4. Reel Bistritz Tablosu

$T_n :$	$t_0^{(n)}$		$t_1^{(n)}$		$t_2^{(n)}$		$\cdots$	
$T_{n-1} :$		$t_0^{(n-1)}$		$t_1^{(n-1)}$		$t_2^{(n-1)}$		$\cdots$
$T_{n-2} :$			$t_0^{(n-2)}$		$t_1^{(n-2)}$		$\cdots$	
$T_2 :$						$t_0^{(2)}$		$t_1^{(2)}$
$T_1 :$							$t_0^{(1)}$	
$T_0 :$								$t_0^{(0)}$

Şimdi verilen bu iki test arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

2.6.a Reel - MJT ile Reel - BT Arasındaki İlişki

Biz reel – MJT de faydalandığımız $\{F_i(z)\}_{i=0}^{n}$ ve reel-BT de faydalandığımız $\{T_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizileri arasındaki ilişkiyi araştıracağız. Sonuç bizim amacımız açısından önemlidir. Reel-BT den elde edilen *Schur-Cohn* minörleri ve iç determinantları elde edelim.

Denklem (2.2.9) dan n satır ve i=n için

$$F_n = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}(z-1)T_{n-1} \quad \text{ve} \quad F_n^{\neq} = \frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}(z-1)T_{n-1} \qquad (2.2.11)$$

denklemine ulaşırız. Böylece;

$$\begin{aligned} a_n^{(n)} &= \frac{1}{2}t_0^{(n)} + \frac{1}{2}t_0^{(n-1)}, \quad & a_n^{(n)} &= \frac{1}{2}t_0^{(n)} - \frac{1}{2}t_0^{(n-1)} \\ a_n^{(n)} + a_0^{(n)} &= t_0^{(n)}, & a_n^{(n)} - a_0^{(n)} &= t_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

elde ederiz. Denklem (2.2.11) i kullanarak ve (2.2.9) numaralı denklemden alınan T_n in değiştirilmesiyle, F_{n-1} i elde edelim.

$$T_{n-2} = \frac{\delta_n T_{n-1}(z)(z+1) - T_n}{z} \quad (\delta_n T_{n-1}(z) = 2\delta_n T_{n-1}(z) - \delta_n T_{n-1}(z))$$

$$T_{n-1} = \frac{2\delta_n T_{n-1}(z) + zT_{n-1}\delta_n - T_{n-1}\delta_n - T_n}{z} = \frac{2\delta_n T_{n-1}(z) - T_n + (z-1)T_{n-1}\delta_n}{z}$$

$$\frac{T_{n-2}}{2} = \frac{2\delta_n T_{n-1}(z) - \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}(z-1)T_{n-1}\delta_n}{z}$$

$$\frac{1}{2}zT_{n-2} = \frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1} - \frac{1}{2}T_n + \frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}\frac{1}{2}(z-1)$$

$$= \frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1} - \left[\frac{\frac{1}{2}T_n t_0^{(n-1)} - \frac{1}{2}t_0^{(n)}T_{n-1}(z-1)}{t_0^{(n-1)}}\right]$$

$$t_0^{(n-1)} = a_n^{(n)} - a_0^{(n)}$$

$$t_0^{(n)} = a_n^{(n)} + a_0^{(n)}$$

$$= \frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1} - \left[\frac{\frac{1}{2}T_n(a_n^{(n)} - a_0^{(n)}) - \frac{1}{2}(a_n^{(n)} + a_0^{(n)})T_{n-1}(z-1)}{t_0^{(n-1)}}\right]$$

$$= \frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}\left[\frac{a_n^{(n)}\frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}a_n^{(n)}(z-1)T_{n-1} - a_0^{(n)}\frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}a_0^{(n)}T_{n-1}(z-1)}{t_0^{(n-1)}}\right]$$

$$= \frac{t_0^{(n)}T_{n-1} - \left(\left[a_n^{(n)}(\frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}(z-1)T_{n-1})\right] - a_0^{(n)}(\frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}T_{n-1}(z-1))\right)}{t_0^{(n-1)}}$$

$$= \frac{t_0^{(n)}T_{n-1} - (a_n^{(n)}F_n^{\neq}(z) - a_0^{(n)}F_n(z))}{t_0^{(n-1)}} = \frac{t_0^{(n)}T_{n-1} - F_{n-1}}{t_0^{(n-1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}zT_{n-2} = \delta_n T_{n-1} - \frac{F_{n-1}}{t_0^{(n-1)}}$$

$$\frac{F_{n-1}}{t_0^{(n-1)}} = \delta_n T_{n-1} - \frac{1}{2}zT_{n-2}$$

$$F_{n-1}=t_0^{(n-1)}\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}-\frac{1}{2}zT_{n-2}$$

$$F_{n-1}=t_0^{(n)}T_{n-1}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}zT_{n-2}$$

$$T_{n-2}=\frac{\delta_n T_{n-1}(z)(z+1)-T_n(z)}{z} \qquad (z+1=2z-z+1)$$

$$zT_{n-2}=2z\delta_n T_{n-1}(z)-zT_{n-1}(z)+T_{n-1}(z)-T_n(z)$$

$$\frac{1}{2}zT_{n-2}=z\delta_n T_{n-1}(z)-\frac{1}{2}z\delta_n T_{n-1}(z)+\frac{1}{2}T_{n-1}(z)-\frac{1}{2}T_n(z)$$

$$\frac{1}{2}zT_{n-2}=z\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{1}{2}z\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)+\frac{1}{2}T_{n-1}(z)-\frac{1}{2}T_n(z)$$

$$=z\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{\frac{1}{2}t_0^{(n)}(z-1)T_{n-1}(z)+\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}T_n(z)}{t_0^{(n-1)}}$$

$$=z\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{\frac{1}{2}t_0^{(n)}(F_n(z)-F_n^{\neq}(z))+\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}(F_n(z)+F_n^{\neq}(z))}{t_0^{(n-1)}}$$

$$=\frac{zt_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{\frac{1}{2}t_0^{(n)}F_n(z)+\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}F_n(z)-(\frac{1}{2}t_0^{(n)}F_n^{\neq}(z)-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}F_n^{\neq}(z))}{t_0^{(n-1)}}$$

$$=\frac{zt_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{F_n(z)\left[\frac{1}{2}t_0^{(n)}+\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}\right]-F_n^{\neq}(z)\left[\frac{1}{2}t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}\right]}{t_0^{(n-1)}}$$

$$\frac{1}{2}zT_{n-2}=\frac{zt_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{F_n(z)a_n^{(n)}-F_n^{\neq}(z)a_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}$$

$$\frac{1}{2}T_{n-2}=\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{F_n(z)a_n^{(n)}-F_n^{\neq}(z)a_0^{(n)}}{zt_0^{(n-1)}}$$

$$=\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{F_n(z)a_n^{(n)}-F_n^{\neq}(z)a_0^{(n)}}{zt_0^{(n-1)}}=\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{F_{n-1}^{\neq}}{t_0^{(n-1)}}$$

$$F_{n-1}=a_n^{(n)}F_n^{\neq}(z)-a_0^{(n)}F_n(z)\ \Rightarrow F_{n-1}^{\neq}=\frac{a_n^{(n)}F_n(z)-a_0^{(n)}F_n^{\neq}(z)}{z}$$

olduğundan,

$$\frac{F^{\neq}_{n-1}(z)}{t_0^{(n-1)}}=\frac{t_0^{(n)}}{t_0^{(n-1)}}T_{n-1}(z)-\frac{1}{2}T_{n-2}$$

$$F^{\neq}_{n-1}=t_0^{(n)}T_{n-1}-\frac{t_0^{(n-1)}}{2}T_{n-2}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$F_{n-1}=t_0^{(n)}T_{n-1}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}zT_{n-2}$$

$$F^{\neq}_{n-1}=t_0^{(n)}T_{n-1}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}T_{n-2}$$

ve katsayılar

$$\begin{aligned} a_{n-1}^{(n-1)}&=t_0^{(n)}.t_0^{(n-1)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)}, \qquad a_0^{(n-1)}=t_0^{(n)}.t_0^{(n-1)} \\ a_0^{(n-1)}+a_{n-1}^{(n-1)}&=2t_0^{(n)}t_0^{(n-1)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)}, \quad a_0^{(n-1)}-a_{n-1}^{(n-1)}=\frac{1}{2}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)} \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (2.2.11) i kullanarak (2.2.9) dan alınan T_{n-1} in değiştirilmesiyle;

$$\begin{aligned} F_{n-2}&=\frac{1}{2}t_0^{(n-1)^2}(2t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-2)})T_{n-2}-\frac{1}{2}t_0^{(n)}t_0^{(n-1)}.t_0^{(n-2)}zT_{n-3} \\ F^{\neq}_{n-2}&=\frac{1}{2}t_0^{(n-1)^2}(2t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-2)})T_{n-2}-\frac{1}{2}t_0^{(n)}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)}T_{n-3} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

ulaşırız. Böylece;

$$\begin{aligned} a_{n-2}^{(n-2)}&=\frac{1}{2}t_0^{(n-1)^2}t_0^{(n-2)}(2t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-2)})-\frac{1}{2}t_0^{(n)}.t_0^{(n-1)}.t_0^{(n-2)}.t_0^{(n-3)} \\ a_0^{(n-2)}&=\frac{1}{2}t_0^{(n-1)^2}t_0^{(n-2)}(2t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-2)}) \\ a_0^{(n-2)}+a_{n-2}^{(n-2)}&=t_0^{(n-1)^2}t_0^{(n-2)}(2t_0^{(n)}-\frac{1}{2}t_0^{(n-2)})-\frac{1}{2}t_0^{(n)}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)}t_0^{(n-3)} \\ a_0^{(n-2)}-a_{n-2}^{(n-2)}&=\frac{1}{2}t_0^{(n)}t_0^{(n-1)}t_0^{(n-2)}t_0^{(n-3)} \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

elde etmiş oluruz.

Teorem 2.6.2 *i=n-2, n-3,...,1* için reel-MJT ve reel-BT satırları arasındaki ilişki

$$F_i = x^{(i)}T_i + y^{(i)}zT_{i-1}$$
$$F_i^{\neq} = x^{(i)}T_i + y^{(i)}T_{i-1} \qquad (2.2.16)$$

denklemleriyle verilir. Burada $x^{(i)} = \frac{a_0^{(i)}}{t_0^{(i)}}$, $y^{(i)} = -\frac{a_0^{(i)} - a_i^{(i)}}{t_0^{(i-1)}}$ ve $x^{(i)}, y^{(i)} \in R$ şeklindedir

Sonuç 2.6.1 $i = n-2, n-3, \ldots, 2$ için $\frac{a_0^{(i-1)} - a_{i-1}^{(i-1)}}{a_0^{(i)}} = \frac{t_0^{(i-2)}}{t_0^{(i)}} \frac{a_0^{(i)} - a_i^{(i)}}{a_0^{(i+1)}}$ geçerlidir.

Teorem 2.6.3 Reel-MJT ve Reel-BT'nin her satırının katsayıları,

$$\frac{a_0^{(i)} - a_i^{(i)}}{a_0^{(i+1)}} = \begin{cases} \dfrac{t_0^{(n-1)}.t_0^{(n-2)}}{t_0^{(n)} - t_0^{(n-1)}} & i = n-1 \\ \dfrac{1}{2} t_0^{(i)}.t_0^{(i-1)} & i = n-2, n-3, \ldots, 1 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

ile birbirine bağlanır ve

$$\frac{a_0^{(i)} + a_i^{(i)}}{a_0^{(i-1)}} = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0^{(n-1)}} & i = n \\ \dfrac{2}{t_0^{(i)}.t_0^{(i-1)}} & i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{cases}$$

bağıntısı geçerlidir.

2.6.b Schur-Cohn Minörleri ve İç Determinantlar

Daha önceki bölümde elde edilen sonuçlarla birlikte, şimdi *Schur-Cohn* minörlerini ve iç determinantları reel-BT den elde edebiliriz. Önce *Schur-Cohn* minörleri hakkında bilgi verelim. Aşağıdaki sonuç Δ_i; *Schur-Cohn* minörlerini reel-BT den nasıl elde edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 2.6.4 $\Delta_i = \frac{1}{2}(t_0^{(n-i+1)} t_0^{(n-i)} [2\Delta_{i-1} - \frac{1}{2} t_0^{(n-i+1)} t_0^{(n-1)} \Delta_{i-2}]$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$ bağıntsı geçerlidir. Burada $\Delta_i = 0, i < 0$ *ve* $\Delta_0 = 1$ dir.

Teorem 2.6.5

$$\Delta_i^- = \begin{cases} t_0^{(n-i)}\Delta_{i-1}^- & i = 1,3,.. \\ \dfrac{1}{2}t_0^{(n-i)}.\Delta_{i-1}^- & i = 2,4,.. \end{cases}$$

ile hesaplanır. Burada $\Delta_i = \Delta_i^-\Delta_i^+, i = 1,2,...,n$ ve $\Delta_0^- = 1$ dir.

2.7 Hu'nun Modifiye Edilmiş Tablosu Yardımıyla Kararlılık Testi

Hu'nun tablosunu oluştururken MJT tablosuna ihtiyaç vardır. Bu yüzden MJT yi tekrar gözden geçirelim. *n.* mertebeden verilen bir skaler denklemin karakteristik polinomu; $D(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n$ şeklinde tanımlansın. Burada, d_j, $j = 1,2,\ldots,n$ reel ve n sistemin mertebesidir. MJT deki polinomlar ve katsayıları için daha önce kullandığımız *F* ve *f* harfleri yerine *D* ve *d* harflerini kullanacağız. MJT Tablo 2.5 de verildiği gibidir [3].

Tablo 2.5. MJT

Satır	$D_i(z)$	z^0	z^1	z^2	$\ldots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
0	$D_0(z)$	$d_{0,0}$	$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$\ldots$	$d_{0,n-2}$	$d_{0,n-1}$	$d_{0,n}$
1	$D_1(z)$	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$\ldots$	$d_{1,n-2}$	$d_{1,n-1}$	
2	$D_2(z)$	$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	$\ldots$	$d_{2,n-2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
n-1	$D_{n-1}(z)$	$d_{n-1,0}$	$d_{n-1,1}$					
N	$D_n(z)$	$d_{n,0}$						

MJT formunun bir polinom dizisi, $\{D(z)\}_{i=0}^n = \{D_0(z)D_1(z)\ldots D_n(z)\}$ olmak üzere;

$D_{i+1}(z) = \dfrac{1}{P_{i-1}}(d_{i,0}D_i(z) - d_{i,n-i}D_i^*(z))$ ile $D_0(z) = D^*(z) = d_n + d_{n-1}z + \ldots + d_0 z^n$ ve

$$P_{i-1} = \begin{cases} d_{i-1,0} & , \ i\text{-}1 > 0 \\ 1 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

alalım. Şimdi modifiye edilmiş bir Hu Tablosu (MHT) elde edeceğiz, öyle ki $\{H_i(z)\}_{i=0}^{n}$ ile gösterilen simetrik polinom dizisi MJT'de kullanılan $\{D_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizisiyle, basit bir ilişki içindedir. Yani; $H_i(z)=D_i(z)+D_i^*(z),\ i=0,1,\dots,n$ olmak üzere

$$D_{i+1}^*(z)=\frac{1}{P_{i-1}}(-d_{i,n-i}D_i(z)+d_{i,0}D_i^*(z))$$

denklemini takiple;

$$zP_{i-1}(D_{i+1}(z)+D_{i+1}^*(z))=(zd_{i,0}-d_{i,n-i})D_i(z)+(d_{i,0}-zd_{i,n-i})D_i^*(z)$$

yazılabilir. Sağ taraftaki işlemlere devam edilirse;

$$zd_{i,0}D_i(z)-d_{i,n-i}D_i(z)+d_{i,0}D_i^*(z)-zd_{i,n-i}D_i^*(z)$$

$$+zd_{i,0}D_i^*(z)-zd_{i,0}D_i^*(z)+d_{i,0}D_i(z)-d_{i,0}D_i(z)$$

$$=zd_{i,0}(D_i(z)+D_i^*(z))+d_{i,0}(D_i(z)+D_i^*(z))$$

$$-(d_{i,n-i}+d_{i,0})D_i(z)-z(d_{i,n-i}+d_{i,0})D_i^*(z)$$

$$=(1+z)d_{i,0}(D_i(z)+D_i^*(z))-(d_{i,n-i}+d_{i,0})D_i(z)-z(d_{i,n-i}+d_{i,0})D_i^*(z)$$

$$=A(D_i(z)+D_i^*(z))+BD_i(z)+CD_i^*(z) \qquad (2.2.16)$$

elde edilir. Burada $A=(1+z)d_{i,0}$, $B=-(d_{i,n-i}+d_{i,0})$, $C=-z(d_{i,n-i}+d_{i,0})$ alınmıştır.

$$BD_i(z)+CD_i^*(z) = B\left[\frac{1}{P_{i-2}}(d_{i-1,0}D_{i-1}(z)-d_{i-1,n-i+1}D_{i-1}^*(z))\right]$$

$$+C\left[\frac{z^{-1}}{P_{i-2}}(-d_{i-1,n-i+1}D_{i-1}(z)+d_{i-1,0}D_{i-1}^*(z))\right]$$

$$BD_i(z)+CD_i^*(z)=\frac{1}{P_{i-2}}\left[(Bd_{i-1,0}-z^{-1}Cd_{i-1,0})D_{i-1}(z)+(-Bd_{i-1,n-i+1}+z^{-1}Cd_{i-1,0})\right]$$

ve $C=zB$ bağıntıları elde edilir. Denklem (2.2.16) ve son eşitlikten;

$$zP_{i-1}(D_{i+1}(z)+D_{i+1}^*(z))=A(D_i(z)+D_i^*(z))+B(D_i(z)+zD_i^*(z))$$

$$+\frac{B}{P_{i-2}}(d_{i-1,0}-d_{i-1,n-i+1})(D_{i-1}(z)+D_{i-1}^*(z)) \qquad (2.2.17)$$

eşitliğine ulaşırız. $D_i(z)$ ve $D_i^*(z)$ nın katsayıları kullanılarak;

$$A+B=zd_{i,0}-d_{i,n-i}$$

$$A + zB = d_{i,0} - zd_{i,n-i}$$

veya

$$A = (1+z)d_{i,0} = (1+z)\delta_i$$

$$B = -(d_{i,n-i} + d_{i,0}) = -h_{i,0}$$

yazabiliriz ve $C = -zh_{i,0}$ olarak buluruz. (2.2.17) numaralı denklemdeki *A, B* ve *C* değerleri yerine konulursa ve $H_i(z) = D_i(z) + D_i^*(z)$ kullanılırsa;

$$H_{i+1}(z) = \frac{1}{P_{i-1}}\Big((1+z^{-1})\delta_i H_i(z) + z^{-1}\mu_i H_{i-1}(z)\Big) \qquad (2.2.18)$$

bulunur. Burada;

$$\delta_i = h_{i-1,0}q_{i-1} = d_{i,0}$$

$$q_i = 2\delta_i - h_{i,0} = d_{i,0} - d_{i,n-1}$$

$$\mu_i = \frac{B}{P_{i-2}}(d_{i-1,0} - d_{i-1,n+i+1}) = -\frac{1}{P_{i-2}} h_{i,0}q_{i-1} \qquad (2.2.19)$$

şeklindedir. Hu'nun Tablosu (HT) ile karşılaştırıldığında, Modifiye Edilmiş Hu Tablosunun (MHT) oluşturulma prosedüründe iki tane modifikasyon vardır.

(i) Denklem (2.2.18) de verilen her polinom dizisi P_{i-1} e bölünür.

(ii) Denklem (2.2.19) deki μ_i faktörü P_{i-2} ye bölünür.

Aşağıdaki teorem denklem (2.2.18) ile MJT de kullanılan denklem arasındaki ilişkiyi tanımlar.

Teorem 2.7.1. MJT de kullanılan denklem (2.2.18) deki $\{H_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizisi ve denklem $\{D_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizisi arasındaki ilişki bize;

$$H_i(z) = D_i(z) + D_i^*(z) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \qquad (2.2.20)$$

verir. Teorem 2.7.1 in ispatı yukarıda elde edilen bulgular sayesinde çok açıktır.

$\{H_i(z)\}_{i=0}^{n}$ dizisini oluştururken yukarıdaki prosedür kolaylıkla tablo tekniği kullanılarak uygulanabilir. MHT ve HT aynı forma sahiptir ve bu Tablo 2.6 da verilmiştir.

Tablo 2.6. Hu'nun Modifiye Edilmiş Tablosu

Satır	z^0	z^1	$\dots$	z^{m_k}	$z^{m_{k+1}}$	$\dots$	z^{m_0}
0	$h_{0,0}$	$h_{0,1}$	$\dots$	h_{0,m_k}	$h_{0,m_{k+1}}$	$\dots$	h_{0,m_0}
1	$h_{1,0}$	$h_{1,1}$	$\dots$	h_{1,m_k}	$h_{1,m_{k+1}}$	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
k^*	$h_{k,0}$	$h_{k,1}$	$\dots$	h_{k,m_k}	$(h_{k,m_{k+1}})$		
k+1	$h_{k+1,0}$	$h_{k+1,1}$	$\dots$	$h_{k+1,m_{k+1}}$			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$				
n-3	$h_{n-3,0}$	$h_{n-3,1}$	$\dots$				
n-2	$h_{n-2,0}$	$h_{n-2,1}$					
n-1	$h_{n-1,0}$	$(h_{n-1,1})$					
N	$h_{n,0}$						

Tablo 2.6 nın ilk sırasındaki elemanlar $H_0(z) = D_0(z) + D_0^*(z)$ katsayılarıdır. Katsayılara göre bu terimler $h_{0,j} = d_j + d_{n-j},\ j = 0,1,\dots,m_0$ şekilde yazılabilir. İkinci sıra, birinci satır elemanları $H_1(z) = D_1(z) + D_1^*(z)$ katsayılarıdır. O halde,

$$H_1(z) = D_1(z) + D_1^*(z)$$

$$= (d_{0,0}D_0(z) - d_{0,n}D_0^*(z)) + z^{-1}(d_{0,0}D_0^*(z) - d_{0,n}D_0(z))$$

$$= d_{0,0}(D_0(z) + z^{-1}D_0^*(z)) - d_{0,n}(z^{-1}D_0(z) + D_0^*(z))$$

olarak elde edilir. Burada katsayılar $h_{1,j} = d_{0,0}(d_{0,j} + d_{0,n-j-1}) - d_{0n}(d_{0,j+1} + d_{0,n-j}),$ $j = 0,1,\dots,m_1$ şeklindedir. Daha sonraki sırada bulunan elemanlar $h_{i+1}, j = \dfrac{1}{P_{i-1}}(\delta_i(h_{i,j} + h_{i,j+1}) + \mu_i h_{i-1,j+1})$, $i = 1,2,\dots,n,\ j = 0,1,\dots,m_i$ bağıntısına bağlı olarak (2.2.18) numaralı denklem kullanılarak hesaplanabilir. n-i'nin tek olduğu satırlar için $h_{i,m_{i+1}} = h_{i,m_i}, n-i$ tek , *i=1,2,…,n-1* ve $\delta_i, q_i\ ve\ \mu_i$ faktörleri (2.2.19) denklemlerinde verilmiştir ve i. satırdaki m_i sayısı

$$m_i = \begin{cases} \dfrac{n-i}{2}, & n-i \quad \text{çift} \\ \dfrac{n-i-1}{2}, & n-i \quad \text{tek} \end{cases} \qquad \text{veya} \quad m_i = \ln t(\frac{n-i}{2})$$

şeklindedir. $H_i(z)$ katsayılarının sağ tarafındaki elemanların aşağı doğru azaldığını görmekteyiz. Ancak, n-i tek satırdaki $h_{i,m_{i+1}}$ elemanlarına $h_{i+1,m_{i+1}}$ elemanlarının hesaplanmasında ihtiyacımız vardır. Biz onları tabloda parantez içine alarak kullandık. Bu da onların sol taraftaki h_{i,m_i} elemanlarına en yakın kopyalar olduğunu gösterir.

Eğer n tek bir sayı ise $m_1 = m_0 = (n-1)/2$ şeklindedir. Yani tablodaki ilk iki sıra aynı sayıda elemana sahiptir. Elemanların sayısı 2 satırda bir düşüş gösterir. Eğer *n* çift bir sayı ise $m_0 = \frac{n}{2}$ şeklindedir. Son iki sıra olan *n-1* ve *n* sıraları her zaman tek bir elemana sahiptir. Yukarıdaki tanımlama *n-i* nin tek sayı olduğu $(h_{i,m_{i+1}})$ elemanlarını içermez. Bu katsayılar ile hesaplanan Δ_i *Schur-Cohn* minörleri ve $\Delta_i^{\mp}$ iç determinantlarına bağlı olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.7.2 Verilen polinomun asimtotik kararlı olması için $\Leftrightarrow \Delta_i = \delta_i > 0 \quad i = 1,2,...,n$ veya $i = 1,2$ için $\Delta_i^+ = h_{i-1,0} >,\ \Delta_i^- = q_{i-1} > 0$ ve $i = 3,4,...,n$ için $\Delta_i^+ = \frac{h_{i-1,0}}{\Delta_{i-2}^-} > 0,\ \Delta_i^- = \frac{q_{i-1}}{\Delta_{i-2}^+} > 0$ olmasıdır [3].

2.8 Schur Dizisinin Elde Edilmesi

Teorem 2.8.1 (Rauche Teoremi) Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonların basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitikseler ve eğri üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise o zaman $f(z)$ ile $f(z)+g(z)$ nin γ eğrisi üzerinde sıfırlarının sayısı aynıdır. $F(z)$; denklem (2.2.6) ile verilen polinom olmak üzere;

$$F_k(z) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i^{(k)} z^i, \quad F_k^{\neq}(z) = z^{n-k} F_k(\frac{1}{z}),\ F_k^{\neq}(z) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k-i}^{(k)} z^i$$

ve buna bağlı katsayılar

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} - m_{k+1} a_{n-k-1}^{(k)},\ k = 0,1,...n-(k+1)$$

$$m_{k+1} = \frac{a_{n-k}^{(k)}}{a_0^{(k)}},\ k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{2.2.21}$$

Schur'un değiştirilmiş sabitleridir. Bu ifadeler yardımıyla; $F_{k+1}(z) = F_k(z) - m_{k+1}F^{\neq}{}_k(z)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ olacak şekilde Schur dizisi elde edilir. Schur dizisinin katsayıları arasındaki ilişkiyi açık şekilde görelim.

$$F(z) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)}z + a_2^{(0)}z^2 + \ldots + a_n^{(0)}z^n \quad , \qquad m_1 = \frac{a_n^{(0)}}{a_0^{(0)}}$$

$$F_1(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z + a_2^{(1)}z^2 + \ldots + a_{n-1}^{(1)}z^{n-1} \quad , \qquad m_2 = \frac{a_{n-1}^{(1)}}{a_0^{(1)}}$$

$$a_0^{(1)} = a_0^{(0)} - \frac{(a_n^{(0)})^2}{a_0^{(0)}}, \qquad a_1^{(1)} = a_1^{(0)} - \frac{a_n^{(0)}.a_{n-1}^{(0)}}{a_0^{(0)}}, \ldots,\ a_{n-1}^{(1)} = a_{n-1}^{(0)} - \frac{a_1^{(0)}.a_n^{(0)}}{a_0^{(0)}}$$

$$F_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}z + a_2^{(2)}z^2 + \ldots + a_{n-1}^{(2)}z^{n-2} \quad , \qquad m_3 = \frac{a_{n-2}^{(2)}}{a_0^{(2)}}$$

$$a_0^{(2)} = a_0^{(1)} - \frac{(a_{n-1}^{(1)})^2}{a_0^{(1)}}, \qquad a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - \frac{a_{n-1}^{(1)}.a_{n-2}^{(1)}}{a_0^{(1)}}, \ldots,\ a_{n-1}^{(2)} = a_{n-1}^{(1)} - \frac{a_1^{(1)}.a_{n-1}^{(1)}}{a_0^{(1)}}$$

$$\vdots$$

$$F_n(z) = a_0^{(n)}$$

elde edilir. Burada birim çember içindeki sıfırların sayısını hesaplayan bir metot verilir. Rouche Teoremi, Schur'un değiştirme sıralamasındaki ard arda gelen sayıların sıfırları arasında tekrarlama oranı kurar. Birim diskteki F nin sıfırları sayısını

$$N_D(F_k) = \begin{cases} N_D(F_{k+1}) & , \quad |m_{k+1}| < 1 \\ n-k-N_D(F_{k+1}), & |m_{k+1}| \geq 1 \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

olacak şekilde $N_D(F)$ ile gösterelim [5].

2.8.a Sturm Dizisi

[4] te sunulan bu dizi için, $p(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$, *der(p)=n* polinomu verilsin. T_k ve U_k sırasıyla 1. ve 2. tür *Chebychev* polinomları olsun. Yinelenen ilişki takibi ile tanımlanan

$$p_{k+1} = U_1 p_k - p_{k-1} \ ,\ \ k=2,3,\ldots \text{ ve } \ s = \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$p_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i\,, \qquad p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i U_{i-1}\,, \qquad p_2 = T_1 p_1 - p_0$$

$$\vdots$$

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-2} (a_{k+i} - a_{k-i-2}) U_i + \sum_{i=k-i}^{n-k} a_{k+i} U_i \;, \quad k=3,\ldots s+1$$

polinomların (p_k) dizisini göz önüne alalım. Bu belirgin formül, hafızanın minimal kullanımı ile p_k polinomunun katsayılarını kolay bir şekilde hesaplar. Yinelenen ilişkide $k > s$ için (p_{k+1}) in derecesi (p_k) nın derecesinden daha büyüktür. O zaman I. *Chebyshev* polinomları

$$\begin{aligned}
T_0 &= 1 & & \\
T_1 &= x & & \\
T_2 &= 2x^2 - 1 & &= 2T_1T_1 - T_0 \\
T_3 &= 4x^3 - 3x & &= 2T_1T_2 - T_1 \\
T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & &= 2T_1T_3 - T_2 \\
T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x & &= 2T_1T_4 - T_3 \\
T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 & &= 2T_1T_5 - T_4 \\
T_7 &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x & &= 2T_1T_6 - T_5 \\
T_8 &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 & &= 2T_1T_7 - T_6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

yapısına sahiptir. Genel form $T_k = 2T_1T_{k-1} - T_{k-2}$ şeklindedir. $U_1 = 2x$ ve diğer polinomlar aynı olarak alınırsa II. *Chebyshev* polinomları elde edilir.

2.8.b Düzenli Durum

p_k dizisi için arka arkaya gelen terimlerin bir rasyonel fonksiyonu $[-1,1]$ aralığı üzerinde bir *Cauchy* dizini ile p nin sıfırlarının sayısı için bir ilişki argümentler prensibi ile verilir. p polinomunun birim çember içindeki sıfırlarının sayısını $N_D(p) = I_{-1}^{+1} \dfrac{p_1}{p_0}$ ile gösterelim. Biz birim çember üzerinde sıfır olmadığını varsayalım. $p_h(1)$ den $p_1(1)$ e ve $p_h(-1)$ den $p_1(1)$ e kadar olan dizilerin farklı işaretlerinin sayısı $\Delta(p_h, p_1)$ olsun.

$$\xi_0 = -p_1(-1)/\,p_0(-1) = -p'(-1)/\,p(-1)$$

$$\eta_0 = -p_1(1)/\,p_0(1) = -p'(1)/\,p(1)$$

sturm değerleri olsun. $\xi_0 \neq s$ ve $\mu_0 \neq s$ ise $p_0, p_1, ..., p_{s+1}$ sturm dizisi takibi ile biz

$$\Delta(p_0, p_{s+1}) = \begin{cases} s+1, & eger\ \xi_0 \quad ve\ \mu_0 > s \\ s \quad , & eger\ min(\xi_0, \mu_0) < s < max(\xi_0, \mu_0)\ , \\ s-1\ , & eger \quad \xi_0\ ve\ \mu_0 < s \end{cases}$$

sahibiz. Burada sturm teoremi yanında $\Delta(p_0, p_{s+1}) = I_{-1}^{+1}\frac{p_1}{p_0} + I_{-1}^{+1}\frac{p_s}{p_{s+1}}$ elde edilir. Verilen P_{S+1}, $[-1,1]$ aralığı üzerinde aynı işarete sahipse o zaman, $I_{-1}^{+1}\frac{p_s}{p_{s+1}} = 0$ dır. Aynı zamanda $N_D(p) = \Delta(p_0, p_{s+1})$ eşitliği geçerlidir. Fakat genelde $\frac{p_s}{p_{s+1}}$ rasyonel fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde *Cauchy* dizini değeri, yüksek dereceli polinomlar için doğrudan doğruya kolay bir şekilde elde edilemez.

2.9 Schur-Cohn Algoritması:

[8] de verilen bu algoritma da $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, $n \geq 0$ *n*. dereceden bir polinom ve $p(z)$ nin karşılıklı $p^*(z)$ polinomu; $p^*(z) := \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + ... + \bar{a}_n$ denklemi ile ifade edilsin. Burada $p^*(z) = \begin{cases} z^n \overline{p(1/\bar{z})} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ ve

$Tp(z) := \bar{a}_0 p(z) - a_n p^*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{a}_0 a_k - a_n \bar{a}_{n-k}) z^k$, $p(z)$ nin "*Schur dönüşümü*" olmak üzere yinelenen $T^2(p), T^3(p), ..., T^n(p)$ dönüşümleri tümevarım yoluyla tanımlanır.

Şimdi, $\eta_k := T^k p(0), \quad k = 1(1)n$ denklemini oluşturalım ve Schur teoremini verelim.

Teorem 2.9.1 p, n dereceden bir polinom olsun. p nin bütün sıfırları $\overline{D_1}$ kapalı birim diski dışında olması için $\Leftrightarrow$ $\eta_k > 0, \quad k = 1(1)n$ olmasıdır [8].

3. Skaler Denklemler için Verilen Kararlılık Testlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde, literatürde mevcut olan kararlılık testlerinin tarafımızdan verilen aşağıdaki örnek üzerinden hesaplamalarını yaparak kararlılıklarını araştırdık ve birbirlerine göre karşılaştırmasını tablo olarak sunduk.

Örnek 3.1 $-0,0352x_n + 0,2891x_{n+2} - 0,7031x_{n+3} + 1,1875x_{n+4} - 1,25x_{n+5} + x_{n+6} = 0$
skaler denkleminin kararlı olup olmadığını tüm kararlılık testleri ile inceleyelim.

Verilen skaler denklemin karakteristik polinomu:

$$D(z) = -0,0352 + 0,2891z^2 - 0,7031z^3 + 1,1875z^4 - 1,25z^5 + z^6$$

dır. $D(z)$ nin katsayılarına bağlı olarak ilk satır oluşturulur.

1. **Jury Testi'**ne göre aşağıdaki tablo elde edilir.

Tablo 3.1. Jury Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6
1	-0,0352	0	0,2891	-0,7031	1,1875	-1,25	1
2	1	-1,25	1,1875	-0,7031	0,2891	0	-0,0352
3	-0,9988	1,25	-1,1977	0,7278	-0,3309	0,044	
4	0,044	-0,3309	0,7278	-1,1977	1,25	-0,9988	
5	0,8040	-1,2339	1,1642	-0,6742	0,2755		
6	0,2755	-0,6742	1,1642	-1,2339	0,8040		
7	0,5705	-0,8063	0,6153	-0,2021			
8	-0,2021	0,6153	-0,8063	0,5705			
$2n-3=9$	0,2846	-0,3356	0,1881				

Jury testine göre verilen kararlılık şartları tablodan

(i) $D(1) = 0,4883$ olup $D(1) > 0$

$(-1)^6 D(-1) = 4,3945$ olup $(-1)^6(-1) > 0$

(ii) $|-0,9988| > |0,044|$, $\quad |0,5705| > |-0,2021|$

$|0,8040| > |0,2755|$, $\quad |0,2846| > |0,1881|$

dır. Verilen $D(z)$ polinomunun asimtotik kararlıdır.

2. **Modifiye Edilmiş Jury Testi** (MJT)'ne göre aşağıdaki tablo elde edilir.

Verilen skaler denklemin karşılıklı polinomu $D^*(z)$

$$D^*(z) = D_0(z) = 1 - 1,25z + 1,1875z^2 - 0,7031z^3 + 0,2891z^4 - 0,0352z^6$$

dır. $D^*(z)$ nin katsayılarına bağlı olarak ilk satır oluşturulur.

Tablo 3.2. MJT Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6
$D_0(z)$	1	-1,25	1,1875	-0,7031	0,2891	0	-0,0352
	$d_{0,0}$	$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$d_{0,3}$	$d_{0,4}$	$d_{0,5}$	$d_{0,6}$
	-0,0352	0	0,2891	-0,7031	1,1875	-1,25	1
$D_1(z)$	0,9988	-1,25	1,1977	-0,7278	0,3309	-0,044	
	$d_{1,0}$	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	$d_{1,5}$	
	-0,044	0,3309	-0,7278	1,1977	-1,25	0,9988	
$D_2(z)$	0,9956	-1,2339	1,1642	-0,6743	0,2755		
	$d_{2,0}$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	$d_{2,3}$	$d_{2,4}$		
	0,2755	-0,6743	1,1642	-1,2339	0,9956		
$D_3(z)$	0,9164	-1,0440	0,8394	-0,3318			
	$d_{3,0}$	$d_{3,1}$	$d_{3,2}$	$d_{3,3}$			
	-0,3318	0,8394	-1,0440	0,9164			
$D_4(z)$	0,7330	-0,6813	0,4247				
	$d_{4,0}$	$d_{4,1}$	$d_{4,2}$				
	0,4247	-0,6813	0,7330				
$D_5(z)$	0,3895	-0,2292					
	$d_{5,0}$	$d_{5,1}$					
	-0,2292	0,3895					
$D_6(z)$	0,1353						

Modifiye Edilmiş Jury Testi'ne göre kararlılık şartlarını tablodan elde edelim.

$D(1) > 0$ ve $(-1)^6 D(-1) > 0$

$\Delta_1 = d_{1,0} = 0{,}9988 > 0$, $\quad \Delta_4 = d_{4,0} = 0{,}7330 > 0$

$\Delta_2 = d_{2,0} = 0{,}9956 > 0$, $\quad \Delta_5 = d_{5,0} = 0{,}3895 > 0$

$\Delta_3 = d_{3,0} = 0{,}9164 > 0$

$n = 6$ (çift)

$\Delta_1^+ = d_{0,0} + d_{0,6} = 1 - 0{,}0352 = 0{,}9648 > 0$

$$\Delta_3^+ = \frac{d_{2,0} + d_{2,4}}{\Delta_1^-} = 1{,}2279 > 0$$

$$\Delta_5^+ = \frac{d_{4,0} + d_{4,2}}{\Delta_3^-} = 1{,}5519 > 0$$

$$\Delta_1^- = d_{0,0} - d_{0,6} = 1 + 0{,}0352 = 1{,}0352 > 0$$

$$\Delta_3^- = \frac{d_{2,0} - 4_{2,4}}{\Delta_1 +} = 0{,}746 > 0$$

$$\Delta_5^- = \frac{d_{4,0} - d_{4,2}}{\Delta_3^+} = 0{,}2474 > 0$$

olur. $D(z)$ polinomunun asimtotik kararlı olduğu görülür.

3. **Modifiye Edilmiş Hu Testi (MHT)'**ne göre; MJT ve bu tablodan yararlanarak MHT oluşturalım. $D^*(z)$ polinomunun katsayıları yardımıyla MJT nin ilk satırı oluşturulur.

Tablo 3.3. MJT Tablosu

I	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6
0	1,0	-1,25	1,11875	-0,7031	0,2891	0	- 0,0352
1	0,9988	-1,25	1,1977	-0,7278	0,3309	-0,044	
2	0,9956	-1,2339	1,1642	-0,6743	0,2755		
3	0,9164	-1,0440	0,8394	-0,3318			
4	0,7330	-0,6813	0,4247				
5	0,3895	-0,2292					
6	0,1353						

Şimdi Modifiye Edilmiş Hu'nun tablosunu MJT'den yararlanarak oluşturalım.

Tablo 3.4. MHT Tablosu

I	δ_i	q_i	z^0	z^1	z^2	z^3
0	1	1,0352	0,9648	-1,25	1,4766	-1,4062
1	0,9988	1,0428	0,9548	-0,9191	0,4698	(0,4698)
2	0,9956	0,7201	1,2711	-1,9081	2,3283	
3	0,9164	1,2482	0,5847	-0,2046	(-0,2046)	
4	0,7330	0,3083	1,1578	-1,3626		
5	0,3895	0,6187	0,16028	(0,16028)		
6	0,1353		0,27055			

Şimdi, MHT için verilen kararlılık şartlarını tablodan elde edeceğiz.

n=6 çift sayı, $m_0 = n/2 = 3$ şeklindedir. Kolaylık bakımından MHT nin $\delta_i \; ve \; q_i$ değerleri tabloda verilmiştir. Bu tablo yardımıyla *Schur-Cohn* minörleri ve iç determinantlar;

$$\Delta_1 = \delta_1 = 0,9988 \qquad \Delta_1^+ = h_{0,0} = 0,9648$$

$$\Delta_2 = \delta_2 = 0,9956 \qquad \Delta_2^+ = h_{1,0} = 0,9548$$

$$\Delta_3 = \delta_3 = 0,9164 \qquad \Delta_3^+ = \frac{h_{2,0}}{\Delta_1^-} = 1,2279$$

$$\Delta_4 = \delta_4 = 0,7330 \qquad \Delta_4^+ = \frac{h_{3,0}}{\Delta_2^-} = 0,5607$$

$$\Delta_5 = \delta_5 = 0,3895 \qquad \Delta_5^+ = \frac{h_{4,0}}{\Delta_3^-} = 1,5511$$

$$\Delta_6 = \delta_6 = 0,1353 \qquad \Delta_6^+ = \frac{h_{5,0}}{\Delta_4^-} = 1,1226$$

$$\Delta_1^- = q_0 = 1,0352, \; \Delta_2^- = q_1 = 1,0428, \; \Delta_3^- = \frac{q_2}{\Delta_1^+} = 0,7464$$

$$\Delta_4^- = \frac{q_3}{\Delta_2^+} = 1,3073, \; \Delta_5^- = \frac{q_4}{\Delta_3^+} = 0,2511, \; \Delta_6^- = \frac{q_5}{\Delta_4^+} = 1,1034$$

dır. Bütün kararlılık şartları sağlanır. Yani Modifiye Edilmiş Jury Testine göre verilen kararlılık şartları tablodan;

$$i)\; D(1) = 0,4883 > 0 \qquad ii)\; \Delta_i > 0, \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$(-1)^6 D(-1) = 4,3945 > 0 \qquad veya \qquad \Delta_i^{\mp} > 0, i = 1,3,5 \; (n \, çift)$$

elde edilir. Verilen $D(z)$ polinomunun asimtotik kararlı olduğu görülür.

4. **Marden-Jury Testi (M-JT)'**ne göre aşağıdaki tabloyu oluştururuz.

Tablo 3.5. M-JT Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6
$D_0(z)$	1	-1,25	1,1875	-0,7031	0,2891	0	-0,0352
	$d_{0,0}$	$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$d_{0,3}$	$d_{0,4}$	$d_{0,5}$	$d_{0,6}$
	-0,0352	0	0,2891	-0,7031	1,1875	-1,25	1
$D_1(z)$	0,9988	-1,25	1,1977	-0,7278	0,3309	-0,044	
	-0,044	0,3309	-0,7278	1,1977	-1,25	0,9988	
$D_2(z)$	0,9956	-1,2339	1,1642	-0,6743	0,2755		
	0,2755	-0,6743	1,1642	-1,2339	0,9956		
$D_3(z)$	0,9153	-1,043	0,8383	-0,3314			
	-0,3314	0,8383	-1,043	0,9153			
$D_4(z)$	0,7279	-0,6768	0,4216				
	0,4216	-,6768	0,7279				

$D_5(z)$	0,3521	-0,2073					
	-0,2073	0,3521					
$D_6(z)$	0,08100						

Marden-Jury Testine göre $D(z)$ nin asimtotik kararlı olması için veya $D(z)$ nin bütün sıfırlarının birim çember içine düşmesi için gerek ve yeter şart $\delta_i = d_{i,0} > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ olmasıdır. Bu değerler tabloya dayanarak elde edilirse

$$\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6\} = \{d_{1,0}; d_{2,0}; d_{3,0}; d_{4,0}; d_{5,0}; d_{6,0}\}$$

$$= \{0{,}9988\ ,\ 0{,}9956\ ,\ 0{,}9153\ ,\ 0{,}7279\ ,\ 0{,}3521\ ,\ 0{,}081\} > 0$$

olur. O halde $D(z)$ asimtotik kararlıdır.

5. **Hu'nun Testi**'ne göre ilk satırı $D^*(z)$ polinomunun katsayılarını alarak aşağıdaki tabloyu oluştururuz.

Tablo 3.6. M-JT Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6
$D_0(z)$	1	-1,25	1,1875	-0,7031	0,2891	0	0,0352
$D_1(z)$	0,9988	-1,25	+1,1977	-0,7278	+0,3309	-0,044	
$D_2(z)$	0,9957	-1,2339	1,1642	-0,6742	0,2755		
$D_3(z)$	0,9155	-0,9333	0,8385	-0,3617			
$D_4(z)$	0,7073	-0,5511	0,4301				
$D_5(z)$	0,3153	-0,1528					
$D_6(z)$	0,076						

Tablo 3.7. Hu'nun Tablosu

Satır	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3
$S_0(z)$	0,9648	-1,25	1,4766	-1,4062
$S_1(z)$	+0,9548	-0,9191	+0,4699	
$S_2(z)$	1,2712	-1,9081	2,3284	
$S_3(z)$	0,5538	-0,0948		
$S_4(z)$	1,1374	-0,6712		
$S_5(z)$	0,1625			
$S_6(z)$	0,152			

Hu Testi'ne göre verilen kararlılık şartındaki ilk durum için gerekli olan $S_{i,0}$, $i=1,2,\dots,n$ değerleri tablodan elde edilirse $s_{1,0}=0{,}9548$, $s_{2,0}=1{,}2712$, $s_{3,0}=0{,}5538$, $s_{4,0}=1{,}1374$, $s_{5,0}=0{,}1625$ olduğu görülür. $S_{i,0}>0$ olduğundan, $D(z)$ asimtotik kararlıdır. İlk durum yerine $S_{i,0}>0$ $i=1,2,\dots,n-2$ ve $q_{n-2}>0$ şartı alınırsa

$$s_{1,0}=0{,}9548,\ s_{2,0}=1{,}2712,\ s_{3,0}=0{,}5538,\ s_{4,0}=1{,}1374,\ q_4=0{,}2846-0{,}1881=0{,}0965$$

olur ki $D(z)$ asimtotik kararlıdır. Bu kararlılık şartlarına eşdeğer olan $S_{i,0}>0$ $i=0,2,\dots,n-2$ olmak üzere $q_0<0$ ve $q_i>0$, $i=2,4,\dots,n-2$ (n çift) için tablodan $q_0=-0{,}0352-1=-1{,}0352$, $q_2=0{,}9957-0{,}2755=0{,}7207$ olduğu görülür. $D(z)$ asimtotik kararlıdır.

6. **Raible Testi'ne** göre verilen skaler denklemin karakteristik polinomu:

$$F(z)=z^6-1{,}2500z^5+1{,}1875z^4-0{,}7037z^3+0{,}2891z^2-0{,}0352$$

dır. Bu polinomun katsayıları yardımıyla aşağıdaki tablo oluşturulur.

Tablo 3.8. Raible Tablosu

Satır	λ^6	λ^5	λ^4	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
	1	-1,2500	1,1875	-0,7031	0,2891	0	-0,352
	-0,352	0	0,2891	-0,7031	1,1875	-1,2500	1
Δ		0,876	-1,2500	1,289	-0,95	,7071	-0,44
$\Delta / p_6 = q_n$		0,876	-1,2500	1,289	-0,95	0,7071	-0,44
		-0,44	0,7071	-0,95	1,289	-1,2500	0,876
Δ_1			0,57	-0,78	0,71	-0,27	0,069
$\Delta_1 / q_5 = r_n$			0,65	-0,89	0,81	-0,31	0,079
			0,079	-0,31	0,81	-0,89	0,65
Δ_2				0,42	-0,55	0,46	-0,13
$\Delta_2 / r_4 = t_n$				0,65	-0,085	0,71	-0,2
				-0,2	0,71	-0,85	0,65
Δ_3					0,38	-0,41	0,29
$\Delta_3 / \mathrm{t}_3 = \mathrm{u}_\mathrm{n}$					0,58	-0,63	0,45
					0,45	-0,63	0,58
Δ_4						0,13	-0,08
$\Delta_4 / u_2 = v_n$						0,22	0,14
						0,14	0,22
Δ_5							0,029
$\Delta_5 / v_1 = s_n$							0,13

Raible testine göre kararlılık şartları için

$$p_6 > 0 \Rightarrow i(p) = +\{q_5, r_4, t_3, u_2, v_1, s_0\}$$

$$o(p) = -\{q_5, r_4, t_3, u_2, v_1, s_0\}$$

olmak üzere p polinomunun $i(p)$ birim çember içine düşen sıfırlarının sayısı ile $o(p)$; birim çember dışına düşen sıfırlarının sayısını bulmak için gerekli olan değerler tablodan görüldüğü gibi

$q_5 = 0{,}876 > 0$ $\qquad$ $u_2 = 0{,}58 > 0$

$r_4 = 0{,}65 > 0$ $\qquad$ $v_1 = 0{,}22 > 0$

$t_3 = 0{,}65 > 0$ $\qquad$ $s_0 = 0{,}13 > 0$

$i(p) = 6$

yazılabilir. Verilen skaler denklem asimtotik kararlıdır.

7. **Bistritz Testi'**ne göre verilen skaler denklemin karakteristik polinomu

$$F(z) = F_6(z) = z^6 - 1{,}2500z^5 + 1{,}1875z^4 - 0{,}7037z^3 + 0{,}2891z^2 - 0{,}0352$$

dır. $n = 6$ (çift) olduğu için $F(z)$ nin asimtotik kararlı olması için;

i) $F(1) > 0 \; ve \; (-1)^6 F(-1) > 0$

ii) $\Delta_1^{\mp} > 0,\; \Delta_3^{\mp} > 0 \; ve \; \Delta_5^{\mp} > 0$, ve $\Delta_5^{\mp} > 0$

şartlarının yerine getirilmesi gerekir. Bistritz Testinde verilen bağıntılar yardımıyla aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

Tablo 3.9. Bistritz Tablosu

T_6	0,9648 z^6		-1,2500 z^5		1,4766 z^4		-1,4063 z^3
T_5		1,0352 z^5		-0,2148 z^4		0,6836 z^3	
T_4			2,0146 z^4		-1,0397 z^3		2,6806 z^2
T_3				0,7158 z^3		0,1596 z^2	
T_2					3,5033 z^2		-1,7824 z^1
T_1						0,1921 z^1	
T_0							8,7891 z^0

Bu tablo yardımıyla *Schur-Cohn* minörleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Delta_1 = t_0^{(n)}.t_0^{(n-1)} = 0{,}9988$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}.t_0^{(n-1)}.t_0^{(n-2)}[\,2\Delta_1 - \frac{1}{2}.t_0^{(n-1)}.t_0^{(n-2)}\,] = 0{,}9956$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2}.t_0^{(n-2)}.t_0^{(n-3)}[\,2\Delta_2 - \frac{1}{2}.t_0^{(n-2)}.t_0^{(n-3)}\Delta_1\,] = 0{,}9165$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2}.t_0^{(n-3)}.t_0^{(n-4)}[\,2\Delta_3 - \frac{1}{2}.t_0^{(n-3)}.t_0^{(n-4)}\Delta_2\,] = 0{,}7330$$

$$\Delta_5 = \frac{1}{2}.t_0^{(n-4)}.t_0^{(n-5)}[\,2\Delta_4 - \frac{1}{2}.t_0^{(n-4)}.t_0^{(n-4)}\Delta_3\,] = 0{,}3895$$

$$\Delta_6 = \frac{1}{2}.t_0^{(n-5)}.t_0^{(n-6)}[\,2\Delta_5 - \frac{1}{2}.t_0^{(n-5)}.t_0^{(n-6)}\Delta_4\,] = 0{,}1353$$

Yine tablo yardımıyla iç determinantlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Delta_1^- = t_0^{(n-1)} = 1{,}0352$$

$$\Delta_2^- = \frac{1}{2}t_0^{(n-2)}\Delta_1^- = 1{,}0427$$

$$\Delta_3^- = t_0^{(n-3)}\Delta_2^- = 0{,}7464$$

$$\Delta_4^- = \frac{1}{2}t_0^{(n-4)}\Delta_3^- = 1{,}3074$$

$$\Delta_5^- = t_0^{(n-5)}\Delta_4^- = 10{,}2511$$

$$\Delta_6^- = \frac{1}{2}t_0^{(n-6)}\Delta_5^- = 1{,}1034$$

$$\Delta_1^+ = \frac{\Delta_1}{\Delta_1^-} = 0{,}9648$$

$$\Delta_2^+ = \frac{\Delta_2}{\Delta_2^-} = 0{,}9648$$

$$\Delta_3^+ = \frac{\Delta_3}{\Delta_3^-} = 1{,}2279$$

$$\Delta_4^+ = \frac{\Delta_4}{\Delta_4^-} = 0{,}5607$$

$$\Delta_5^+ = \frac{\Delta_5}{\Delta_5^-} = 1{,}5511$$

$$\Delta_6^+ = \frac{\Delta_6}{\Delta_6^-} = 0{,}1226$$

Verilen kararlılık şartları sağlandığından $D(z)$ polinomunun ifade ettiği skaler denklem asimtotik kararlıdır.

8. Schur dizisi yardımıyla birim çember içine düşen sıfırların sayısını hesaplayalım.

Tablo 3.10. Schur Dizisi Tablosu

	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6
	-0,352	0	0,2891	-0,7031	1,1875	-1,25	1
	1	0	-0,821	1,997	-3,376	3,55	-2,84
	-2,84	3,55	-3,376	1,997	-0,821	0	1
Δ	-7,06	10,08	-10,4	7,67	-5,70	3,55	
	1	-1,428	1,473	-1,086	0,807	-0,503	
	-0,503	0,807	-1,086	1,473	-1,428	1	
Δ_1	0,75	-1,022	0,927	-0,345	0,0887		

	1	-1,36	1,236	-0,46-	0,118		
	0,118	-0,46	1,236	-0,299	1		
Δ_2	0,986	-1,30	1,09	-0,30			
	1	-1,32	1,10	1			
	-0,30	1,1	-1,32				
Δ_3	0,91	-0,99	0,70				
	1	-1,09	0,77				
	0,77	-1,09	1				
Δ_4	0,41	-0,25					
	1	-0,61					
	-0,61	1					
Δ_5	0,63						

Bu tablo yardımıyla Schur dizisi kolay bir şekilde elde edilir.

$$p_1(x) = \Delta a_0^{(0)} = -2{,}478 - 3{,}548z + 3{,}66z^2 - 2{,}6998z^3 + 2{,}006z^4 - 1{,}2496z^5$$

$$p_2(x) = \Delta_1 a_0^{(0)} a_0^{(1)} = \Delta_1(2{,}48512) = 1{,}86 - 2{,}54z + 2{,}30z^2 - 0{,}86z^3 + 0{,}22z^4$$

$$p_3(x) = \Delta_2 a_0^{(0)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} = \Delta_2(1{,}86386) = 1{,}84 - 2{,}42z + 2{,}03z^2 - 0{,}56z^3$$

$$p_4(x) = \Delta_3 a_0^{(0)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)} = \Delta_3(1{,}83774624) = 1{,}67 - 1{,}82z + 1{,}29z^2$$

$$p_5(x) = \Delta_4 a_0^{(0)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)} a_0^{(4)} = \Delta_4(1{,}67) = 0{,}68 - 0{,}42z$$

$$p_6(x) = \Delta_5 a_0^{(0)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)} a_0^{(4)} a_0^{(5)} = \Delta_5(0{,}68) = 0{,}43$$

Yine oluşturulan Schur dizisinin katsayıları yardımıyla Schur sabitlerini elde edelim.

$$m_1 = \frac{a_6^{(0)}}{a_0^{(0)}} = -2{,}84 \quad |m_1| > 1 \quad \Rightarrow \; N_D(p_0) = n - k - N_D(p_1)$$

$$= 6 - N_D(p_1)$$

$$m_2 = \frac{a_5^{(0)}}{a_0^{(1)}} = \frac{-1{,}2496}{-2{,}487} = 0{,}5 \quad |m_2| < 1 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_1) = N_D(p_2)$$

$$\mathrm{m}_3 = \frac{\mathrm{a}_4^{(2)}}{\mathrm{a}_0^{(2)}} = \frac{0{,}22}{1{,}86} = 0{,}12 \qquad |\mathrm{m}_3| < 1 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_2) = N_D(p_3)$$

$$m_4 = \frac{a_3^{(3)}}{a_0^{(3)}} = \frac{-0{,}56}{1{,}84} = -0{,}3 \qquad |m_4| < 1 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_3) = N_D(p_4)$$

$$m_5 = \frac{a_2^{(4)}}{a_0^{(4)}} = \frac{1,29}{1,67} = 0,77 \qquad |m_5| < 1 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_4) = N_D(p_5)$$

$$m_6 = \frac{a_1^{(5)}}{a_0^{(5)}} = \frac{-0,42}{0,68} = -0,62 \quad |m_6| < 1 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_5) = N_D(p_6)$$

$$N_D(p_6) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D(p_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D(p) = 6$$

olup köklerinin hepsi bir çember içerisindedir. O halde $f(z)$ kararlıdır.

9. Schur-Cohn Algoritması'na göre verilen skaler denkleminin karakteristik polinomu $p(z) = -0,0352 + 0,2891z^2 - 0,7031z^3 + 1,1875z^4 - 1,25z^5 + z^6$ polinomu ve $p(z)$ nin karşılıklı polinomu,

$$p^*(z) = -0,0352z^6 + 0,2891z^4 - 0,7031z^3 + 1,1875z^2 - 1,25z + 1$$

olmak üzere; $p(0) = 0,0352$ ve $p^*(0) = 1$ dır. Şimdi, $\eta_k = T^k p(0), k=1,2, \ldots ,6$ katsayılarını hesaplayalım.

$$\eta_1 = Tp(0) = a_0 p(0) - a_6 p^*(0) = 0,0352^2 - 1 = -0,99876 < 0$$

$$\eta_2 = T^2 p(0) = a_0^2 p(0) - a_0 a_6 p^*(0) = 0,0352^3 - 0,0352 = -0,035 < 0$$

$$\eta_3 = T^3 p(0) = a_0^3 p(0) - a_0^2 a_6 p^*(0) = 0,0352^4 - 0,0352^2 = -0,00124 < 0$$

$$\eta_4 = T^4 p(0) = a_0^4 p(0) - a_0^3 a_6 p^*(0) = 0,0352^5 - 0,0352^3 = -0,00004 < 0$$

$$\eta_5 = T^5 p(0) = a_0^5 p(0) - a_0^4 a_6 p^*(0) = 0,0352^6 - 0,0352^4 = -0,000001 < 0$$

$$\eta_6 = T^5 p(0) = a_0^6 p(0) - a_0^5 a_6 p^*(0) = 0,0352^7 - 0,0352^5 = -0,000000053 < 0$$

olup verilen skaler denklemin kararlı olduğu görülür.

Kararlılık testi için *Sturm* dizisini elde edelim. Verilen skaler denklemin karakteristik polinomu

$$p(x) = -0,0352 + 0,2891x^2 - 0,7031x^3 + 1,1875x^4 - 1,25x^5 + x^6$$

dır. Bu polinomun katsayıları ve *Chebyshev* polinomlarını kullanarak

$$p_0 = \sum_{i=0}^{6} a_i T_i = 32x^6 + 20x^5 - 38{,}8x^4 - 27{,}8124x^3 + 9{,}0782x^2 + 8{,}3593x - 0{,}1368$$

$$p_1 = \sum_{i=1}^{6} a_i U_{i-1} = 16x^5 + 10x^4 - 15{,}25x^3 - 11{,}4062x^2 + 2{,}0157x + 1{,}9531$$

$$p_2 = T_1 p_1 - p_0 = -16x^6 - 10x^5 + 23{,}25x^4 + 39{,}2186x^3 - 7{,}0625x^2 - 6{,}4062x + 0{,}1368$$

$$p_3 = \sum_{i=0}^{1} (a_{3+i} - a_{1-i}) U_i + \sum_{i=2}^{3} a_{3+i} U_i = 4x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}5546x - 1{,}9531$$

$$p_4 = \sum_{i=0}^{2} (a_{4+i} - a_{2-i}) U_i = 2{,}0704x^2 + 2{,}5x - 1{,}9336$$

sturm dizisini elde ederiz. Kararlılık için gerekli olan ξ_0 ve η_0 değerleri

$$p_1(-1) = -2{,}2188, \quad p_0(-1) = 1{,}9945 \Rightarrow \xi_0 = \frac{-p_1(-1)}{p_0(-1)} = 1{,}11 \neq s = 3$$

$$p_1(1) = 3{,}3126\ , \quad p_0(1) = 3{,}0883 \ \Rightarrow \ \eta_0 = \frac{-p_1(1)}{p_0(1)} = -1{,}073 \neq s = 3$$

$$\frac{p_s}{p_{s+1}} = 1{,}932x - 1{,}125 + \frac{5{,}9936x + 4{,}1284}{2{,}0704x^2 + 2{,}5x - 1{,}9336},$$

$\dfrac{p_s}{p_{s+1}}(1) = 3{,}902$, $\dfrac{p_s}{p_{s+1}}(-1) = -2{,}2677$ olup $[-1, +1]$ aralığında işareti farklıdır.

$$I_{-1}^{1} \frac{p_s}{p_{s+1}} = 3 \quad \text{ve} \quad I_{-1}^{1} \frac{p_1}{p_0} = 1\ , \quad N_D(p) = 4$$

olarak bulunur. Kökler mutlak değerce incelenmiştir.

Gerçek kökler 0,250196916; -0,00008162634742 ± 0,7500018075i; 0,5000339998 ± 0,5001611927i; 0,5002049448 olup $D(z)$ asimtotik kararlıdır.

Şimdi tablo yardımıyla çalışma boyunca ele aldığımız testlerin birbirlerine gore avantajını ve dezavantajlarını değerlendirelim.

Tablo 3.11. Kararlılık Metotlarının Karşılaştırılması

	İşlem Sayısı	İşlem Kolaylığı	İşlem Hızı	Yuvarlama Hatası	Determinant Hesabı
Jury Testi	İşlem sayısı en az olan testir.	Modifiye işlemi olmadığından büyük reel katsayılı polinomlar için sayı değerleri büyüyeceğinden işlem zorlaşabilir.	İşlem sayısı az olduğundan, verilen polinomun katsayılarına bağlı olarak işlem hızı değişir.	Yuvarlama hatası işlem sayısı az olduğundan diger testlere göre az olur. Yuvarlama hatası bu testte etkilidir.	Determinant hesabı gerektirir.
Hu'nun Kararlılık Testi	İşlem sayısı Marden-Jury testine göre fazladır.	Marden-Jury testinden farklı olarak ek toplama işlemi gerektirir.	İşlem hızı biraz daha yavaşlar.	Kararlılık testi için işaret incelemesi yapıldığından yuvalama hatasının önemi yoktur.	Determinant hesabı gerektirir.
Jury Testi II(Raible Tablosu)	Yukarıdaki testlere göre işlem sayısı fazladır.	Ek bölme işlemi sayı değerlerini küçültür. Bu nedenle işlem kolalaşır.	İşlem hızı yavaştır.	İşlem sayısı fazlalığı yuvarlama hatasını artırsada bu testtede işaret incelemesi yapıldığından yuvarlama hatası ihmal edilir.	Determinant hesabı gerektirir.
Reel MJT	İşlem sayısı raible tablosuna göre daha azdır. Kararlılık şartı seçimine göre işlem sayısı artabilir.	Modifiye işlemi gereği işlem kolaylaşır.	Kararlılık testinde ilk şart uygulanırsa Raible testine yakındır. Aksi durumda daha geç sonuç verir.	İlk şart kullanılırsa yuvarlama hatası önem arz etmez. Diğer şartlar için yuvarlama hatası önemlidir.	Determinant hesabı gerektirir.

Hu'nun Modifiye Edilmiş Testi	Bu testler içinde en fazla işlem gerektiren testir.	Reel MJT'de olduğu gibi modifiye işleminden dolayı işlem kolaylaşır.	Diğer testlere göre sonuca ulaşma hızı yavaştır.	Kararlılık için ilk şart kullanıldığında yuvarlama hatası önem arz etmez. Diğer şartlar için yuvarlama hatası önemlidir.	Determinant hesabı gerektirir.
Bistritz Testi	İşlem sayısı bu katagoride incelenen testlere göre daha fazladır.	İşlemler kolay bir şekilde yapılamaz.	İşlem hızı yavaştır.	Yuvarlama hataları önemlidir.	Determinant hesabı gerektirir.
Schur Dizisi Eldesi ile Kararlılık Testi	İşlem sayısı fazladır.	İşlem kolaylığı bölme işlemi ile sağlanır.	Sonuca ulaşma hızı yavaştır. Avantajı Rouche teoremine dayanmasıdır.	Katsayı oranı gerekliliğinden oluşan değişme aynı olacağından yuvarlama hatası önemsizdir.	Determinant hesabı gerektirmez.
Sturm Dizisi	İşlem sayısı schur dizisine göre fazladır. Dezavantajı Yüksek dereceli polinomlar için işlem satısı arttığından tesbit yapmak zorlaşır.	Dizi oluşumunda Chebyshev polinomları kullanıldığından mertebe artmakta buda işlemi zorlaştırmaktadır.	Sonuca ulaşma hızı Schur dizisine göre yavaştır. Dezavantajı Kökün modülüne göre değerlendirme yapar.	Polinom dizisinin (-1) ve (+1) deki işareti test için gerekli olduğundan yuvarlama hataları önemlidir.	Determinant hesabı gerektirmez.
Schur-Cohn Algoritması	İşlem sayısı azdır.	Nümerik işlem gerektiğinden işlem zorlaşır.	Sayı değerlerinin kuvvet hesabı gerektiğinden işlem yavaşlayabilir.	Yuvarlama hatası sayı büyüklüğüne bağlı olarak artabilir.	Determinant hesabı gerektirmez.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, skaler denklemlerin kararlılığını test etmek için kullanışlı ve pratik olması yönüyle, kararlılık tabloları elde edilmiştir. Üzerinde çalışılan kararlılık metotları Jury

Testi, Marden-Jury Testi, Hu’nun Testi, Raible Testi, Modifiye Edilmiş Jury Testi, Schur Dizisi Eldesi ile Kararlılık Testi, Bistritz Testi, Hu’nun Modifiye Edilmiş Tablosu Yardımıyla Kararlılık Testi, Sturm Dizisi ve Schur-Cohn Algoritması ile Kararlılık Test teknikleridir. Burada Schur dizisi yardımıyla oluşturulan tablo ile Raible tablosu, katsayıların tabloya diziliş farklılığı dışında benzerlik gösterir. Tablo oluştururken yapılan işlem sayısı aynıdır. Daha sonraki kısımda kararlılık tesbiti için Raible tablosu için oluşan her polinom dizisinde en büyük katsayılı terimin işaretine bakmak yeterli olurken, oluşturulan Schur’un tablosu için bu yeterli değildir. Bu tablodan yararlanılarak oluşturulan schur dizisi katsayıları yardımıyla Schur sabitleri elde edilip, bu sabitlerin 1’e göre kıyasında her dizi için birim çember içine düşen sıfırların sayısı, diziler arasındaki ilişki ile elde edilir. Dolayısıyla Raible’in kararlılık testine göre daha fazla işleme gerek duyulmakta, bu da süreyi artırmaktadır. Burada verilen n.ci mertebeden skaler denklemin Schur dizisi eldesi ile kararlılık tesbiti, Fonksiyonel Analiz’in temelini oluşturan Rouche teoremine dayandığı için işlem sayısının fazlalığına rağmen daha sağlıklı bir yöntemdir.

Jury Testi ile Marden-Jury Testi de daha önceki bahsedilen 2 yöntemde olduğu gibi sadece tabloya diziliş yönünden farklılık gösterir. Jury Testi n. dereceden bir skaler denklem için 2n-3 satır elemanı hesaplamayı ve bu elemanlar arasındaki ilişkiyi göz önünde tutarken, Marden-Jury Testi skaler denklemin karakteristik polinomuna karşılık gelen polinom ile başlayan tablo elemanlarından ilk sütun elemanlarının işaretleriyle ilgilenir. Bu oluşum yönüyle Raible tablosuna benzer olup, Jury Testi daha az bir hesaplama gerektirir. $D(1)>0$ ve $(-1)^n D(-1)>0$ şartlarının haricinde diğer şartlar tablodan ek bir işleme gerek kalmadan kolayca görülür. Yalnız burada elemanların birbirlerine göre büyüklüğü önem arz ettiğinden yapılan yuvarlama hataların büyüklüğü sonucu değiştirebilir. Marden Jury Testinde işaret önemli olduğundan yuvarlama hatası bu yönüyle devre dışı kalır.

Şimdiye kadar Jury, Marden-Jury, Raible, Schur dizisi eldesi ile kararlılık test metotları arasında kıyas yapacak olursak şunu söyleyebiliriz. Raible tablosu veya Schur dizisini elde etmek için oluşturulan kararlılık tablosuna bakılırsa bu iki metottaki dizileri oluşturmak için Raible tablosunda en büyük dereceli terimin katsayısını diğer terimlere, schur dizisini elde etmek için en küçük dereceli terimin katsayısını diğer terimlere bölerek işlem yapmaktayız. Bu da işlem sayısını arttırmakta ve sonuca ulaşmadaki zamanda bu ölçüde artmaktadır. Raible tablosu için önemli olmayan yuvarlama hatası aslında Schur dizisi ile yapılan tespitte de pek önem arz etmez. Çünkü bulunan Schur sabitleri polinom dizisindeki en büyük terim ile en küçük terim oranı ile bulunduğundan ve 1'e göre kıyas yapıldığından sonucu büyük oranda değiştirmeyecektir. Raible tablosunun daha kısa sürede cevap verdiğini söylemiştik. Şu ana kadar ele alınan Jury ve Marden Jury Testinde tablo oluşumundaki hesaplama, Raible ve Schur dizisi ile yapılan kararlık tablosuna göre daha kısa sürede oluşturulduğu görülmektedir. Metotlar arasında en kısa sürede cevap veren metot Jury Testidir. En geç cevap veren metotsa Schur dizisi eldesi ile yapılan incelemedir. Bu sonuca rağmen Jury tablosundaki yuvarlama hatası göz önüne alınırsa, sonuca ulaşma hızına rağmen daha sağlıksızdır. Marden-Jury tablosundan faydalanılarak dizi elemanlarının karşılıklı toplamları ile Hu'nun tablosu, yani simetrik polinom dizisi elde edilir. Polinom simetrik olduğundan bu tablodaki elemanlar, Marden Jury tablosundaki elemanların yaklaşık yarısı kadar olduğu görülür. Bu sayede ilk sütun elemanlarının işaretleri göz önüne alınarak sonuca ulaşılır. Marden-Jury Testine göre tekrar bir tabloya daha ihtiyaç duyulduğundan işlem sayısı fazladır. Literatürde skaler denklemlerin kararlılık testinde yaygın olarak kullanılan tablo formları M-JT (*Marden-Jury* Testi) ve MJT (Modifiye Edilmiş Jury Tablosu) olarak dikkat çekmektededir. M-JT, skaler denklemden elde edilen karakteristik polinomuna karşılık gelen polinomu alarak tablo oluştururken, MJT ise yine aynı polinomu kullanarak fakat 3. satırdaki polinomdan itibaren her terimin katsayısını üst iki satırdan ilk satırın ilk elemanına bölünmüş hali olarak karşımıza çıkar. Aslında MJT'nin dikkat çekici olması yapılan bu modifikasyon işlemidir. Bölme işlemi sayı değerlerini küçültme avantajının yanında yuvarlama hatalarının artmasına sebebiyet verir. Bahsedilen her iki testte de işaret incelemesi yapılarak sonuca ulaşılsa da, MJT'de M-JT'den farklı olarak karalılık testi için Schur-Cohn minörleri ve iç determinant hesabıda gerekeceğinden süre uzayacaktır. Hu'nun Tablosu M-JT tablosundan yararlanarak dizi elemanlarının karşılıklı toplamları ile simetrik polinom dizisi elde ederken Bistritz tablosu MJT'deki polinom dizisinden yararlanarak kararlılık testi için simetrik polinom dizisine ulaşır. Aradaki fark Hu'nun polinom dizisi M-JT'den kolayca elde edilirken, Bistritz polinom dizisi matematiksel işlemlere gerek duyar. Benzer şekilde Hu'nun simetrik polinom dizisi kullanılan tablo formunda başka bir nümerik işleme gerek kalmadan ilk sütun elemanının işaretine bakarak sonuca ulaşabilirken, *Bistritz* elde edilen simetrik polinomları kullanarak Δ_i *Schur-Cohn* minörlerini bulduktan sonra kararlılık incelemesi yapmasıdır. Bu durumda Hu'nun tablosu daha pratik gözükmektedir.

MHT'nin; MJT üzerindeki bariz avantajı, MHT'nin eleman sayısı bakımından MJT'nin eleman sayısının yarısı kadar hesaplamayı gerektirmesidir. δ_i, q_i ve $h_{i,0}$ faktörleri Δ_i Schur-Cohn minörleri ile $\Delta_i^{\mp}$ iç determinantların hesaplanmasında doğrudan kullanılabilir.

Görüldüğü gibi Marden-Jury tablosunun pek çok formu vardır. Bunlardan bazıları artan bir düzende $D(z)$ katsayılarını kullanarak ilk sırasını oluştururken diğerleri azalan bir düzeni takip eder. Hu'nun tablosu Marden-Jury tablosundan ve MHT ise Modifiye edilmiş Jury tablosundan yararlanılarak oluşturulduğu için bu durum MHT ve HT'de ortaya çıkmaz. Çünkü bu tablolar simetrik bir polinom olan $H(z) = D(z) + D^*(z)$'den oluşurlar. MHT daha açık kararlılık şartlarıyla birlikte BT ile benzer karışıklıklara sahiptir. BT *Schur-Cohn* minörleri ve iç determinantların elde edilmesi için bir yol gösterir. *Schur-Cohn* minörlerinin MJT'den elde edilmesi ihtimali, *2-D* ve *n-D* skaler denklem sistemlerine uygulanabilen basitleştirilmiş kararlılık kriterinin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu sonuçlara ulaşarak, MJT ve BT satırları arasında bir ilişki de oluşturduk. Daha sonra sade parametreler sunuldu. Bu sonucun kullanımı hesaplama bakımından avantajlı olabilir. Ancak hesaplama prosedürünün elde edilmesi daha karmaşıktır.

Sturm dizisi ile yapılan kararlılık testi birim çember içindeki sıfırların modülünün sayısını hesaplar. Bu yüzden verilen n. dereceden polinom kararlı olsa dahi biz birim çember içindeki sıfırların sayısını n'den daha küçük hesaplayabiliriz. Bu durum bizi, çift katlı veya eşlenik kökün kaç tane olduğunu bilmediğimizden verilen polinomun kararlı olmama sonucuna ulaştırabilir. Bunun yanında Sturm dizisi eldesi ile kararlılık testi yüksek mertebeli skaler denkleminin kararlılık incelemesini zorlaştırır. Sturm dizisinin bir avantajı determinant hesabını içermemesidir.

Schur-Cohn Algoritması $T^k P(z),\ k=1,2,\ldots,n$ dönüşümü ile kararlılık incelemesi yapar. Uygulaması oldukça kolay olup determinant hesabı gerektirmez. Yüksek mertebeden skaler denklemler için kuvvet alma işlemi arttığından fazla haneli işlemler süreyi uzatabilir.

Kararlılık belirleme şemasının gelişmesi günümüzde üzerinde çalışılan araştırma konusudur. Kararlılığı belirlemekte çizgesel yaklaşımların önemi sade parametreler dikkate alındığında belirgin hale gelir. Böylesi durumlarda yaygın bir şekilde mevcut olan net kök yerleştirme prosedürleri çoğu zaman etkisizdir. Ancak, bu amaca yönelik olarak polinomsal alan yaklaşımlarıyla birlikte çizgesel yaklaşımlar etkili, basit ve sistematik şemalar ortaya çıkardığı görülür.

Kaynaklar

[1] X. Hu, *J Franklin Inst-Eng Appl. Math.*, 1994, **331,** 1.

[2] K. Premaratne, E. I. Jury, *J. of the Franklin Institute*, 1993, **330**, 165.

[3] X. Hu, *Systems & Control Letters*, 1994, **22,** 385.

[4] B. Gleyse, *Appl. Math. Letters*, 1997, **10**, 123.

[5] B. Gleyse, *Appl. Math. Letters*, 1999, **12**, 57.

[6] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, *Automatica*, 1999, **35**, 251.

[7] S. N. Elaydi, *Springer*, New York, 1995.

[8] A. Hadjidimos, D. Noutsos, M. Tzoumas, *J. Comput. Appl. Math.*, 1996, **72**, 63.