# İlköğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin Sürekli Fonksiyonlarla İlgili İspatlama ve Ters Örnek Oluşturma Performansları

# Proofing and Counter-exampling Performances of Students in the Elementary Mathematics Education Department for Continuous Functions

**Merve ÖZKAYA**

*Atatürk Üniversitesi KKEF İlköğretim Matematik Eğitimi, 25240 Erzurum-Turkey*

mdurkaya@atauni.edu.tr

**Ahmet IŞIK**

*Atatürk Üniversitesi KKEF İlköğretim Matematik Eğitimi, 25240 Erzurum-Turkey*

isik@atauni.edu.tr

**Alper Cihan KONYALIOĞLU**

*Atatürk Üniversitesi K. K. Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Eğitimi, 25240 Erzurum-Turkey*
*ackonyali@atauni.edu.tr*

**Özet**

Üst düzey matematiksel düşünmede, ispat yapma ve ters örnek verme bir önermenin niçin doğru veya yanlış olduğunu ve böyle bir önermenin olup olmadığını göstermek için çok önemli yere sahiptir. Öğrenciler birçok matematik dersinde sürekli fonksiyonlarla karşılaştıklarından fonksiyonların tanım bölgelerinde ispatları ve ters örnekleri öğrenmeleri önemlidir. Son zamanlarda, yapılan çalışmalar matematiksel ispatlarda öğrencilerin zorlandıklarını ortaya koymuştur. Bu araştırma çalışmalarının birçoğu lisans düzeyinde sürekli fonksiyonların tanım bölgelerinde ispat ve ters örneklerin üretilebileceği üzerine odaklanmıştır. Yaptığımız bu çalışmanın amacı da, öğrencilerin ispat ve ters örnek üretme yeteneklerini ve matematiksel algılarını belirlemektir. Bu çalışmanın bulguları, katılımcıların ispat ve ters örnek yazmada zorluk yaşadıklarını, öğrenme ve öğretmede ispat ve ters örnek verirken daha dikkatli olunması gerektiğini düşündürmektedir. Daha da önemlisi, bir teoremin ispatını yapmak veya ters örnek kurmak müfredat analizi ve ileri matematik derslerinde öğretim tasarımı oluşturma düşüncesini geliştirebilir.

**Anahtar Kelimeler**

Sürekli fonksiyon, ters örnek, ispat

**Abstract**

In advanced mathematical thinking, proof and counterexample are very important to indicate why a proposition is true or false and whether such proposition exists or not. It is important for students to learn counter-exampling and proofing within function domains because functions are frequently mentioned and used within many mathematics courses. Recent studies have revealed that students have difficulty in mathematical proofs. Most of these studies have focused on the potentiality of proofing and counter-exampling within the domains of functions. The aim of this study is to measure proofing and counter-exampling skills of students and to determine their mathematical perceptions. The findings show that participants experience problems in proofing and counter-exampling, and in the light of these findings, it is assumed that it is necessary to exemplify proofs and counterexamples carefully in learning and teaching process. Furthermore, to prove a theorem or to set a counterexample may contribute to the formation of a teaching draft within the advanced mathematics and curriculum analysis courses.

**Keywords**

Continuous function, counter-example, proof

## Giriş

Karşılaşılan bir problemin çözümü için, insan zihinsel bir çaba içerisinde bulunarak belli bir akıl yürütme sürecine girer. Çünkü insan düşünebilen bir varlıktır ve bu onu diğer canlılardan farklı kılar. Akıl yürütme sürecini geliştiren en önemli araçlardan biri de matematiktir. Matematiğin akıl yürütme sürecine katkısı kendi özelliğinden kaynaklanmaktadır (Umay, 2003). Matematiksel akıl yürütme süreçlerinde öğrenciler, çoğunlukla daha önce yaşadıkları süreçleri uygulamayı tercih etmişlerdir (Bergqvist, 2007). Lithner (2004) akıl yürütme süreçlerinin belirlenmesinde analiz dersini kullanmıştır. Üniversite seviyesindeki Analiz dersi gibi derslerde, matematiksel akıl yürütme becerilerinin ortaya konulabileceği ispatlama ve ters örnek verme yeterlilikleri önem kazanmaktadır. Hem matematikçiler hem de matematik eğitimcileri için geçerli olan bir ispat önemli bir matematiksel aktivitedir (Alcock and Weber, 2005, p.1). Ama matematiksel bir iddia için bir ispat oluşturmak veya bu iddiayı çürütecek ters bir örnek vermek çok da kolay değildir. Üniversite düzeyindeki öğrenciler, kendi kavrama süreçleri içerisinde ispat ve ters örnek oluşturmada sıkıntı yaşamamaktadırlar. Ancak matematiksel bir iddiaya ispat oluşturmak veya bu iddiayı çürütmek için düşüncelerini ifade etmede zorlanmaktadırlar (Ko, 2010).

Öğrenenler için matematiksel ispat süreçleri oluşturmak ve matematiksel ifadeleri anlamlandırmak zor bir süreçtir. Matematiksel bir ifadeyi anlamlandırma ile ispat yapma birbirinden farklıdır. Matematiksel ispatta bir ifadeden hareketle diğer bir ifadeyi doğrulamak için tanımlar, açıklamalar veya yöntemler kullanılır (Tall, 1989). Ayrıca matematiksel ispat bilinen doğrulara dayanır (Stylianides, 2009). Bell (1979) matematiksel ispatın üç özelliğinden bahseder. Birincisi, bir ifadenin ispatı için bilinen sonuçların varlığından yeni sonuçlar oluşturmada informal yolla tümdengelim metodunu kullanmak, ikincisi matematiğin doğasını tümdengelim veya aksiyomatik sistem olarak göz önüne almak ve üçüncüsü sistemleştirilmiş süreç içerisinde hiyerarşik tümdengelim basamaklarını ihtiva eden aksiyomlar olarak uygun başlangıç noktalarını seçmektir.

Sebebi ne olursa olsun öğrenciler doğru bir ispat oluşturmada zorluklar yaşamaktadırlar (Senk, 1985; Martin and Harel, 1989; Goetting, 1995; Harel and Sowder, 1998). Bu zorluklar çoğu zaman, bir matematiksel kavramın anlamlandırılma süreçlerinde yaşanmaktadır. Bu duruma bağlı olarak birçok araştırmacı öğrencilerin ispatlama süreçlerini incelemiştir (Balacheff, 1991; Harel and Sowder, 1998). Özellikle Harel and Sowder (1998)'in belirlediği üç ana başlık altında toplanan ispat şeması önemlidir. Bu şemanın birincisi dışa bağlı etkenlerle ispat (external conviction), ikincisi deneysel ispat (empirical) ve üçüncüsü ise analitik ispattır (analytical). Dışa bağlı etkenlerle ispat şeması öğrencilerin zihinlerinde var olanlarla ispatlama sürecini geliştirmeleriyle ilgilidir. Gerçekten de öğrenciler yeni bir ispat oluşturma sürecini tercih etmezler. Deneysel ispat şemasında bazı sezgilere dayalı olarak iddialar kabul edilebilir veya reddedilebilir. Analitik ispat şemasında ise mantıksal süreçlerle sonuca varılır. Healy and Hoyles (2000) öğrencilerin cebirdeki ispat kavramları üzerine yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin iki tür ispat sürecine sahip olduklarını ortaya çıkarmışlardır. Öğrenciler, deneme-yanılma (trial and error) ile yapılan ispatın yeterli olmadığını bildikleri halde deneme-yanılma sürecini sıklıkla kullanmışlardır. Yine Weber and Alcock (2004) doktora ve lisans öğrencileri ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında, anlamsal(semantic) ve sözel(syntactic) iki ispatlama sürecinden bahsetmektedirler. Anlamsal ispatta, matematiksel kavramları örneklendirme süreci vardır. Sözel ispat ise matematiksel tanımların öğrenciler tarafından kendilerince anlamlı hale getirilerek mantıksal akıl yürütme sürecinde kullanılmasıdır.

Matematikte oluşturulan örnekler, matematik öğretiminde önemlidir. Bunlar kendi içerisinde üç türe ayrılmıştır: 'generik örnek (generic example)', 'ters örnek (counter-example)' ve örneklenemeyen örnek (non-example)' dır. Bu çalışmada da kullanılacak olan ters örnek, karşıt bir iddiayı ispatlamak için oluşturulan bir örnektir (Bills et al., 2006). Öğrenicilerin bir kavrama yönelik örnek veya ters örnek oluşturmaları ispat geliştirme sürecinde önemlidir ve ters örnek oluşturma sadece bir ifadeyi çürütmek için kullanılmamaktadır (Whiteley, 2009), Ters örneğin öğreniciler tarafından nasıl oluşturulduğu da merak konusu olmuştur. Bu nedenle, matematiksel bir iddianın bireyler tarafından nasıl çürütüldüğünün ortaya konduğu birçok çalışma yapılmıştır (Ko and Knuth, 2009b; Lin, 2005). Peled and Zaslavsky (1997) öğretmen adayları ve öğretmenlerle gerçekleştirdikleri çalışımlarında kullanılan ters örnek türlerini sınıflandırmışlardır. Zazkis and Chernoff (2008) çalışmalarında ters örneğin pedagojik bilgi boyutuyla ilgilenerek öğrencilere bilişsel çatışma imkânı sağlamak için ters örneği bir araç olarak kullanmışlardır.

Üniversite düzeyinde matematik bölümlerinin en temel derslerden biri analiz dersidir. Bezuidenhout (2001), çalışmasında üniversite birinci sınıf öğrencilerinin Analiz derslerinin ilk bölümlerinde yer alan limit ve süreklilik kavramlarını nasıl anladıklarını ortaya koymuştur. Bu çalışmada, öğrencilerin fonksiyonun sürekliliğini o noktada limitin varlığına bağladıkları ifade edilmektedir. Yine benzer bir sonuç Baştürk ve Dönmez (2011)'in çalışmasında da yer almaktadır. Fonksiyonlarla ilgili epistomolojik engeller üzerine çalışan araştırmacıların ulaştıkları ortak sonuçlardan biri, öğrencilerin ve hatta bazı öğretmenlerin sürekli fonksiyonların bir tek formülle ifade edildiğini düşünmeleridir (Hitt, 1994). Süreklilik ile ilgili temel problemlerin sebebi, sürekliliğin bilinen tanımlarından ziyade öğrencilerin kendilerinin oluşturdukları bilimsellikten uzak tanımları kullanılıyor olmalarıdır (Tall and Vinner, 1981; Bezuidenhout, 2001). Analiz dersleri üniversite öğrencileri için en temel dersleri arasında yer aldığından, analiz dersinde verilen temel kavramlar en iyi şekilde öğrencilere kavratılmalıdır. Bu temel kavramlardan biri de sürekliliktir. Literatür incelendiğinde süreklilik ile ilgili çalışmalara pek rastlanmamıştır.

Bu çalışmamızda Ko and Knuth (2009a) tarafından oluşturulan ispat oluşturma kategorileri kullanılmıştır. Bu kategorilerin anlamlandırılması ile ilgili benzer çalışmalar birçok araştırmacının çalışmasında da yer almaktadır (Healy and Hoyle, 2000; Harel and Sowder, 1998; Weber, 2004).

Türkiye'de bir üniversitede yaptığımız bu çalışmada, özellikle öğrencilerin süreklilik kavramıyla ilgili ispat ve ters örnek oluşturma yeterlikleri incelenmiştir. Araştırma sürecinde aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır.

- İlköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ispat oluşturma süreçleri nasıldır?
- İlköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ters örnek verme süreçleri nasıldır?

## Yöntem

### Katılımcılar

Çalışmanın örneklemini ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıfta öğrenim gören 151 öğrenci oluşturmaktadır. Bu öğrencilerin hepsi Analiz I dersini almış, Analiz II dersini de almakta olan öğrencilerdir**.** Şu an ki öğretim programında da Analiz I ve Analiz II derslerinin ikisi de 2. sınıf müfredatında yer almaktadır. Analiz I dersinin içeriğini tek değişkenli fonksiyonlarda; limit kavramı ve uygulamaları, fonksiyonlarda süreklilik ve uygulamaları, süreksizlik çeşitleri başta olmak üzere türev ve integral kavramları oluşturur. Yani bu dersi alan öğrenciler fonksiyonlarda süreklilik kavramı ile Analiz I dersinde karşılaşmışlardır. Bu çalışma bu kavramın yoğun olarak üzerinde durulduğu Analiz I dersini almış öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Ayrıca öğrencilerin hepsi eşit şartlarda olup aynı öğretim elemanından Analiz I dersini almaktadırlar. Öğretim sürecinde öğretim elemanı dersi soyuttan-somuta(teoriden-uygulamaya) şeklinde anlatmaktadır. Her konu sonunda alıştırma niteliğinde soru çözmektedir. Öğrenciler sadece not almakta olup dinleyici konumundadırlar. Yine öğretim elemanı teoremleri tahtada kendi ispatlamaktadır. Kısacası, öğretimde ağırlıklı olarak geleneksel öğretim yöntemi uygulanmaktadır.

**Veri Toplama Aracı**

Veriler, beş açık uçlu sorudan oluşan bir test ile toplanmıştır. Bu test soruları Ko and Knuth (2009a) tarafından Fitzpatrick (1996)'den uyarlanmıştır. Sürekli fonksiyonlarla ilgili bu soruların üçü doğru ifadeler içerirken, ikisi yanlış ifadeler içerir. Bu veri toplama aracının amacı öğrencilerin sürekli fonksiyonlarda ispatlama ve ters örnek verme yeterliliklerini ortaya koymaktır ( Tablo 1).

Tablo 1. Testte kullanılan açık uçlu sorular

| Problem | Matematiksel ifadeler | Doğru/yanlış |
|---|---|---|
| 1 | f, g bir S sayılar kümesinde tanımlı iki fonksiyon ve $a \in S$ olsun. Eğer f, a noktasında sürekli ve g fonksiyonu a noktasında sürekli değilse, f.g fonksiyonu a noktasında sürekli değildir. | Yanlış |
| 2 | f bir S sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve $\|f\|$, x noktasında değeri $\|f(x)\|$ olan bir fonksiyon olsun. Eğer f, $a \in S$ noktasında sürekli ise $\|f(x)\|$'de $a \in S$ noktasında süreklidir | Doğru |
| 3 | $f^2$ , S sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve $a \in S$ olsun. Eğer $f^2$, a noktasında sürekli ise f de a noktasında süreklidir | Yanlış |
| 4 | f, [0,1] kapalı aralığından [0,1] kapalı aralığına üzerine sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [0,1]$ vardır. | Doğru |
| 5 | $D = [0,1] \cup (2,3]$ olmak üzere $f: D \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} x, & eğer\ 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & eğer\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$ ile tanımlanan $f: D \rightarrow R$ fonksiyonu süreklidir. | Doğru |

**Verilerin toplanması**

İlk öncelikle Ko and Knuth (2009a)'dan aktarılan veri toplama aracı Türkçeye çevrilmiştir. Türkçeye çevrilen veri toplama aracı dil uzmanlarına kontrol ettirildikten sonra veri toplama aracı ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Testin uygulama süresi önce otuz dakika olarak düşünülse de uygulama esnasında bu süre elli dakikaya çıkmıştır. Öğrencilerden, sürekli fonksiyonlarla ilgili ifadelerden doğru olduğunu düşündüklerine bir ispat oluşturmaları, yanlış olduğunu düşündüklerine ise ters bir örnek vermeleri istenmiştir.

**Verilerin analizi**

Veriler, iki kısma ayrılarak analiz edilmiştir. Birincisi öğrencilerin doğru olan matematiksel ifadelere oluşturdukları ispat süreçlerine göre, ikincisi ise yanlış olan ifadelere verilen ters örneklere göre yapılan analizlerdir. Oluşturulan ispat kategorileri Tablo 2'de, ters örnek kategorileri ise Tablo 3'de yer almaktadır.

Tablo 2. İspat oluşturma kategorileri

| Kategori | Açıklama |
|---|---|
| Cevapsız (No response) | Boş bırakılan, konu ile ilgisiz olan, tahmini olarak verilen cevaplar |
| Yeniden ifade etme (Restatement) | İspat oluşturmada temel oluşturmayan, öğrencilerin kendi cümleleriyle problemi tekrar ifade etmesini içeren cevaplar |
| Ters Örnek(Counter-example) | Doğru bir ifadeyi red etmek için verilen yanlış ters örnekleri içeren cevaplar |
| Deneme-yanılma (Empirical) | İspatı örneklerle vermeyi içeren cevaplar |
| Referanssız-sembolik (Non-referential symbolic) | Mantıksal hatalı, ispat oluşturmayan, anlamlarının ötesinde manipüle edilmiş sembolleri içeren cevaplar |
| Yapısal (Structural) | Geçerli bir ispat oluşturmak için tanımların, geçerli aksiyom ve teoremlerin kullanıldığı fakat mantıksal hataların bulunduğu cevaplar |
| Tamamlanmış (Completeness) | Tamamlanmış ispatı içeren cevaplar (Ko and Knuth, 2009a, s.71). |

Tablo 3.Ters örnek oluşturma kategorileri

| Kategori | Açıklama |
|---|---|
| Cevapsız (No response) | Boş bırakılan, konu ile ilgisiz olan, tahmini olarak verilen cevaplar |
| İspat (Proof) | Yanlış bir durumu ispatlamak için verilen yanlış ispatları içeren cevaplar |
| Yetersiz (Inadequate) | Yanlış veya hiçbir yerde bulunmayan bir ifadeyi çürütmek de başarısız olan ters örnekleri içeren cevaplar |
| Doğrulama (Justification) | Yanlış bir durumu çürütmek için ters örnek vermek yerine yanlış olan ifadeyi anlatmayı içeren cevaplar |
| Tamamlanmamış(Incomplete) | Yanlış bir ifadeyi çürütmede başarılı fakat mantıksal hatalı ters örnek içeren cevaplar |
| Yeterli (Adequate) | Tamamlanmış ters örnek içeren cevaplar (Ko and Knuth, 2009a, s.71). |

Bu kategorilerin yanı sıra soruyu yanlış algılayan veya bu kategoriler içerisinde yer almayan öğrenci cevapları için diğer kategorisi oluşturulmuştur. Veriler bu kategorilere göre analiz edilmiştir. Birbirinden bağımsız iki araştırmacı verileri analiz etmiştir. Analiz edilen veriler karışlılaştırılmış, gerekli yerlerde yeniden kodlamalar yapılmıştır.

# Bulgular

### İspat içeren sorulara ilişkin öğrenci cevapları

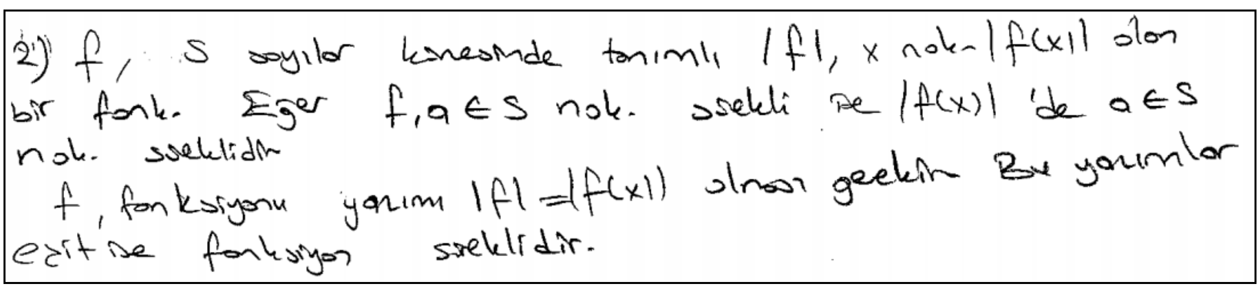
Cevapları doğru olan 2, 4 ve 5. sorulara yönelik öğrenci cevaplarının verilen kategorilere göre oluşturulmuş frekans ve yüzdeleri Tablo 4 de verilmiştir.

Tablo 4. İspat oluşturma kategorilerinin yüzdeleri ve frekansları

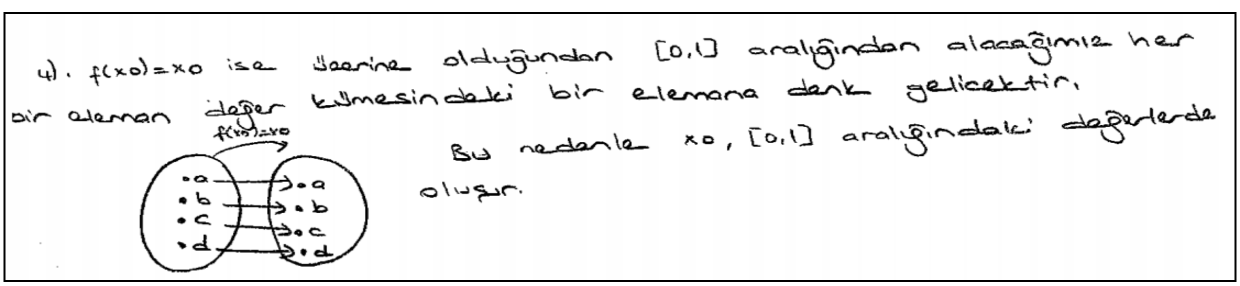
| Problem numarası | Tamamlanmış | | Cevapsız | | Yeniden ifade etme | | Ters Örnek | | Deneme-yanılma | | Sembolik | | Yapısal | | Diğer | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % |
| 2 | 0 | 0 | 26 | 17 | 23 | 15 | 29 | 19 | 19 | 13 | 16 | 11 | 15 | 10 | 23 | 15 |
| 4 | 0 | 0 | 35 | 23 | 19 | 13 | 22 | 15 | 12 | 8 | 5 | 3 | 14 | 9 | 44 | 29 |
| 5 | 0 | 0 | 37 | 25 | 30 | 20 | 39 | 26 | 0 | 0 | 5 | 3 | 5 | 3 | 35 | 23 |

Tablo 4 incelendiğinde fonksiyonlarda süreklilik ile ilgili doğru matematiksel ifadelere, öğrencilerin çoğu ya ters örnek vermeye çalışmış ya da bu ifadeleri içeren soruları boş bırakmışlardır. Diğer kodu, tamamen mantıksal hata içeren ve tanımları, teoremleri veya aksiyomları ispat oluşturma sürecinde kullanmayan öğrencilerin cevapları ve soruyu yanlış algılayıp ona göre süreç işleten öğrenci cevaplarından oluşur. Örneğin ST olarak kodlanan öğrenci, 2. soruyu tamamen mantıksal hatalar üzerine doğrulamaya çalışmışken, TC isimli öğrenci 4. soruyu yanlış algılamıştır.

ST kodlu öğrencinin 2. soruya verdiği cevap


2) f, S sayılar kümesinde tanımlı |f|, x nok. |f(x)| olan bir fonk. Eğer f, a ∈ S nok. sürekli ise |f(x)| 'de a ∈ S nok. süreklidir
f, fonksiyonu yarım |f| = |f(x)| olması gerekir. Bu yarımlar eşit ise fonksiyon süreklidir.

TC kodlu öğrencinin 4. soruya verdiği cevap

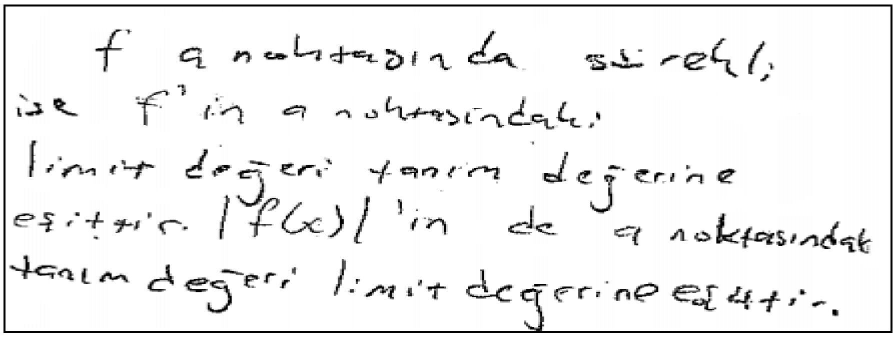

4). f(xo)=xo ise üzerine olduğundan [0,1] aralığından alacağımız her bir eleman değer kümesindeki bir elemana denk gelicektir.
Bu nedenle xo, [0,1] aralığındaki değerlerde oluşur.


**Problem 2** ile ilgili öğrenci cevaplarının yorumları

2. soruda öğrencilerin, "cevapsız" ve "diğer" kategorilerinden başka yoğun olduğu diğer iki kategori "yeniden ifade etme" ve "ters örnek " kategorisidir. İspat için yeterli düzeyde temel oluşturamayan öğrenci cevapları yeniden ifade etme kategorisinde yer alırken, doğru olan bu matematiksel ifadenin yanlış olduğunu düşünerek ters örnek veren öğrencilerin cevapları ise ters örnek kategorisinde yer almaktadır. 2. Problem için hiçbir öğrenci doğru bir ispat oluşturamamıştır.

**Yeniden ifade etme**

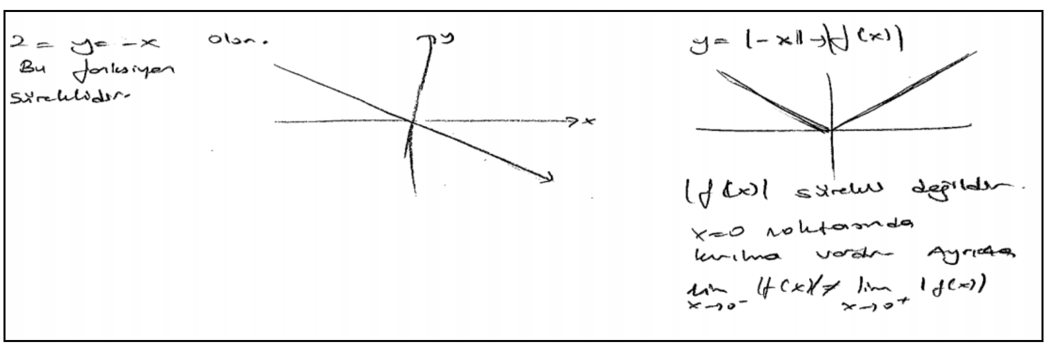
**AO:**


f a noktasında sürekli ise f'in a noktasındaki limit değeri tanım değerine eşittir. |f(x)|'in de a noktasındaki tanım değeri limit değerine eşittir.

Görüldüğü gibi AO, hiçbir bilimsel veriyi dayanak göstermeden ispatlama sürecine geçmiştir. 2. sorudaki ifadenin doğru olduğunu belirleyebilmiş olmasına rağmen, bu sorudaki ifadeyi tekrardan ileri gidememiştir. Yani geçerli bir ispat oluşturulamamıştır. Bu nedenle yukarıdaki cevaba benzer cevaplar yeniden ifade etme kategorisinde yer almıştır.

**Ters örnek**

**SÖ:**




Yukarıdaki cevap incelendiğinde aslında bu öğrencinin sağ ve sol limiti almayla ilgili bir sıkıntısının olduğu anlaşılmaktadır. Burada öğrenci sağ ve sol limit almayı sağdan ve soldan türev almayla karıştırmaktadır. Aslında öğrenci $y = |x|$ fonksiyonunun, $x = 0$ noktasında sürekli olduğu fakat türevli olmadığı bilgisine daha öncesinden sahiptir. Fakat bu bilgi kavramsal düzeyde olmadığından karıştırılmıştır. Öğrencilerin bazıları ispatı, aşağıdaki şekilde göstermişlerdir.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ ve \ \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \ ise \ \lim_{x\to a^+} |f(x)| = |f(a)| \ ve \ \lim_{x\to a^-} |f(x)| = |f(a)| \ olur. O \ halde$$

$|f(x)|$ *fonksiyonu süreklidir*

Böyle bir ifadenin doğruluğundan bahsedemeyiz. Süreklilik tanımı ile uyumlu olmayan bu ifade öğrencilerin kendilerinin oluşturdukları bir tanımdır. Burada öğrenci, limit ve mutlak değer kavramı üzerinde bazı değişiklikler yapmıştır. Ama bu değişimler ispat için geçerli değildir.

Mantıksal olarak hiçbir hata içermeyen yalnız tam bir ispat için yeterli olmayan beş öğrencinin ifadesi de şöyledir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = f(a) \Rightarrow \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |L| = |f(a)| \Rightarrow \lim_{x\to a}|f(x)| = |L| = |f(a)|\; olup\; |f(x)|\, fonksiyonu$$

*a noktasında süreklidir*

Aslında bu öğrencilerin cevapları incelendiğinde herhangi bir hata ile karşılaşılmamıştır. Limit almada mutlak değerin özelliği kullanılarak istenilen sonuca ulaşılmıştır. Ama bunların sadece özellikleri kullanılmış olup anlamsal boyutuna yer verilmediği için doğru bir ispat olarak kabul edilmemiştir.

Ayrıca bir noktada süreklilik için verilen ε-δ tekniğini kullanan öğrencilerde mutlak değer fonksiyonu için bir δ(ε)>0 değeri bulamamışlardır.

Yine HG isimli öğrencinin cevabı aşağıdaki gibidir.

2) f' a'da sürekli ise

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ dır.

$f(x) = f(a) + \varepsilon$ (Bir fonksiyonun limiti ile arasındaki fark $\varepsilon$ olduğundan)

$|f(x)| \leq |f(a)| + |\varepsilon|$

$\lim_{x\to a} |f(x)| \leq \lim_{x\to a} |f(a)| + |\varepsilon|$

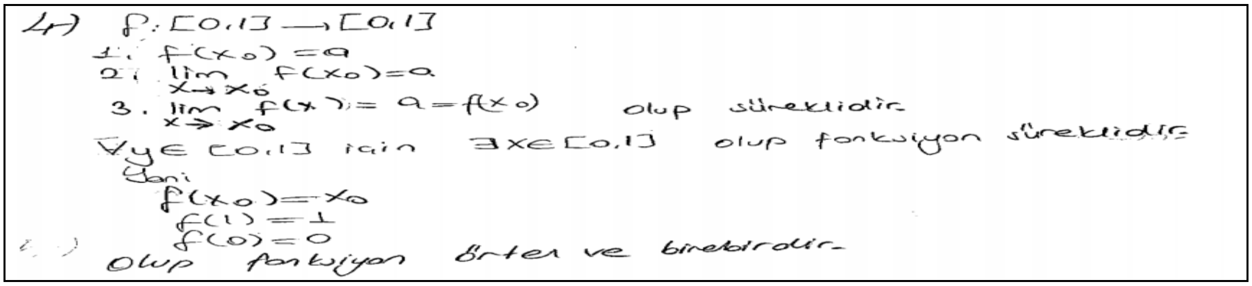
$\lim_{x\to a} |f(x)| \leq |f(a)|$ olur. $|f(x)|$ fonksiyonunda süreklidir.

Yukarıdaki cevap incelendiğinde aslında bu öğrenci sandviç teoremini kullanarak sonuca varmaya çalışmıştır. Yalnız bu teorem, iki eşitsizlik arasında kalan fonksiyonlar için geçerlidir. Tek taraflı olarak bir eşitsizliğin her iki tarafından limit almak, her iki fonksiyonunda limitinin o noktada eşit olduğunu göstermez. Yukarıda verildiği gibi çeşitli matematiksel tanım veya teoremlerin yanlış kullanıldığı gerçek manada bir ispat oluşturamayan öğrenci cevapları referanssız-sembolik olarak kodlanmıştır.

**Problem 4** ile ilgili öğrenci cevapları

4.soruda on dokuz öğrenci ispat oluşturmada temel olmayacak ifadeler kullanmışlardır. Bu öğrencilerden UI'nın cevabı aşağıdaki gibidir.

UI:

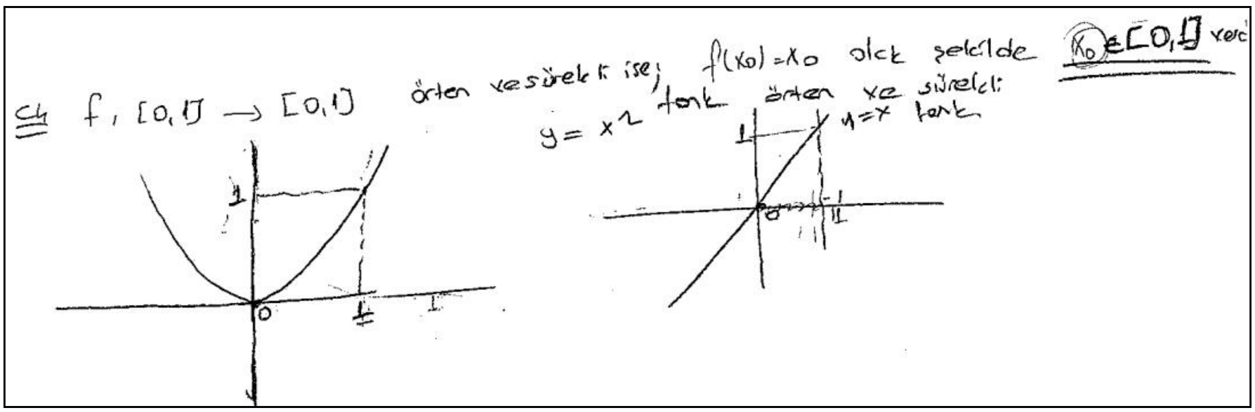


4) $f: [0,1] \to [0,1]$
1. $f(x_0) = a$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = a$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a = f(x_0)$ olup süreklidir

$\forall y \in [0,1]$ için $\exists x \in [0,1]$ olup fonksiyon süreklidir
yani
$f(x_0) = x_0$
$f(1) = 1$
$f(0) = 0$
olup fonksiyon örten ve birebirdir.

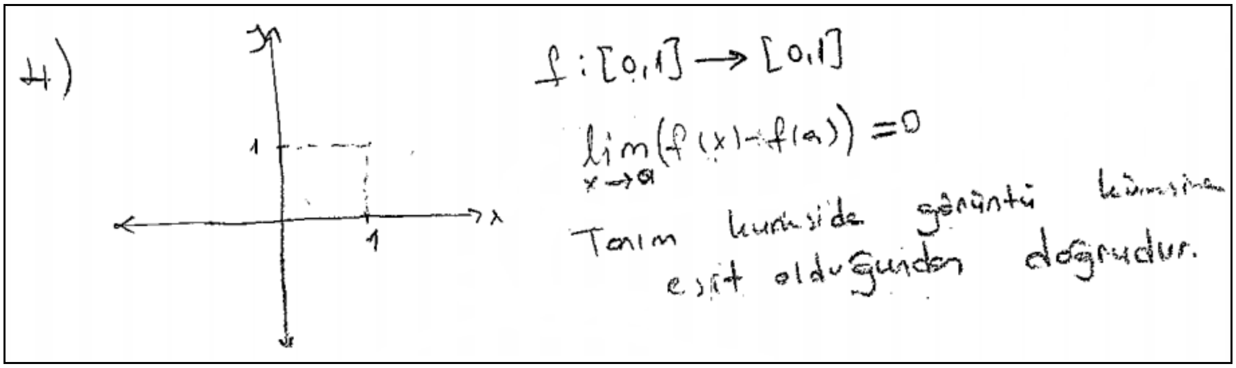
UI'nın cevabı incelendiğinde sürekli fonksiyonların ve örtenliğin tanımının bilindiği anlaşılmaktadır. Fakat burada yazılan tanımlar sadece ifade de kalmıştır. İstenen ispatta hiçbir şekilde kullanılmamıştır. Öğrenci, genel tanımları yazmış ardından $f(x_0) = x_0$ sonucuna ulaşmıştır. Yani öğrencinin yazdıkları ispat teşkil etmemektedir. Bu ve buna benzer cevaplar yeniden ifade etme olarak kabul edilmiştir.

DK:




Bu soruda on iki öğrenci, deneme-yanılma yolunu kullanarak ifadeyi doğrulamaya çalışmışlardır. Doğru örnekleri bir araya getirmek ispat oluşturmaz. Bu öğrenciler genellikle $y = x$ ve $y = x^2$ fonksiyonlarından yola çıkarak verilen ifadenin doğru olduğu kanısına varmışlardır. Evet, her iki fonksiyonda verilen aralıkta hem örten hem de süreklidir. $y = x$ fonksiyonu için $\forall x_0 \in [0,1]$ *için* $f(x_0) = x_0$ iken $y = x^2$ fonksiyonu sadece 0 ve 1 noktasında bu şartı sağlamaktadır. Ama bu iki örnekle ispat oluşturulmaz. Bu şekilde bir cevap veren DK isimli öğrencinin cevabı yukarıdadır.

DA:

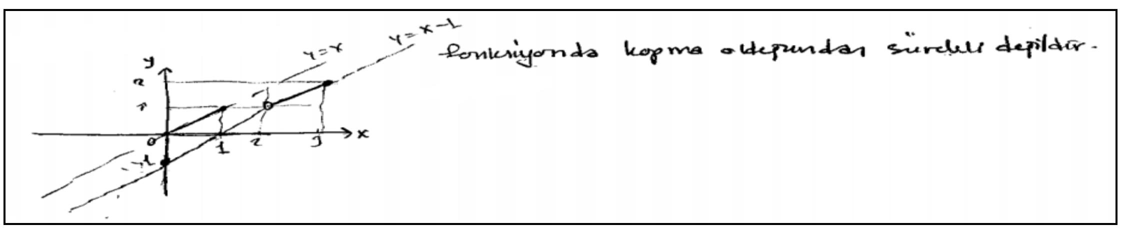



Yapısal kategorisinde yer alan öğrencilerin çoğu limit tanımını kullanmışlardır. Yalnız kullandıkları tanımdan bağımsız olarak ifadenin doğruluğunu, uygun olmayan bir gerekçeyle açıklamışlardır. Bu kategoride yer alan DA olarak kodlanan öğrenci tanım ve görüntü kümesinin eşit olması sebebiyle ifadenin doğru olduğunu düşünmüştür. Bu durum ise tamamen mantıksal bir hata içermektedir.

**Problem 5** ile ilgili öğrenci cevapları

Ters örnek kodunda 39 öğrenci yer almaktadır. Bu kodda yer alan öğrenciler genelde verilen fonksiyonun grafiğini çizmek suretiyle, fonksiyonun sürekli olmadığı kanısına varmışlardır. Bu öğrencilerden birinin cevabı aşağıdaki gibidir.

ÇK:




Öğrencinin cevabı incelendiğinde aslında bir kavram yanılgısı karşımıza çıkmaktadır. Bu öğrenci grafikte kopma olduğundan dolayı fonksiyonun sürekli olamayacağını söylemiştir. Literatürde de sürekli bir fonksiyonun grafiğinin tek bir parçadan oluşması gerektiğine yönelik bir kavram yanılgısı mevcuttur (Tall and Vinner, 1981). Bu şekilde verilen öğrenci cevapları ters örnek olarak kodlanmıştır.

5'inci soruyla ilgili diğer bir öğrenci cevap kategorisi ise yeniden ifade etmedir. Öğrenciler burada 0, 1, 2 ve 3 noktalarında sürekliliğe bakarak, fonksiyonun sürekliliği ile ilgili karar vermeye çalışmışlardır. Bu noktalarda fonksiyonun limitini alıp, fonksiyonun o noktadaki limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki değerinin eşit olduğunu göstermişlerdir. Bu durum zaten açıktır. Bunu göstermek ispat oluşturmak için yeterli bir açıklama değildir. Var olan durumu göstermek, ispat oluşturamaz.

YK:

5) $D = [0,1] \cup (2,3]$ $\quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

$0 \le x \le 1 \quad f(x) = \lim\limits_{x \to [0,1]} f(x)$

$2 < x \le 3 \quad f(x) = \lim\limits_{x \to (2,3]} f(x)$

olduğundan $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir

Yukarıdaki cevaba benzer cevaplar ise referanssız-sembolik olarak kodlanmıştır. Görüldüğü gibi manipüle edilmiş sembolleri içeren bu cevap bir ispat olarak kabul edilemeyeceğinden bu kategoride yer almıştır.

**Ters örnek içeren sorulara ilişkin öğrenci cevapları**

Yanlış ifadelerin bulunduğu 1 ve 3. sorulara yönelik öğrenci cevaplarının verilen kategorilere göre oluşturulmuş frekans ve yüzdeleri Tablo 5 de verilmiştir.

Tablo 5. Ters örnek verme kategorilerinin yüzdeleri ve frekansları

| Problem numarası | Cevapsız | | İspat | | Yetersiz | | Doğrulama | | Tamamlanmamış | | Yeterli | | Diğer | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % | f | % |
| 1 | 11 | 7 | 89 | 59 | 2 | 1 | 6 | 4 | 6 | 4 | 0 | 0 | 37 | 25 |
| 3 | 25 | 17 | 47 | 31 | 17 | 11 | 8 | 5 | 7 | 5 | 13 | 9 | 34 | 22 |

Tablo 5 incelendiğinde öğrencilerin büyük bir kısmı ters örnek vermeleri gereken bu matematiksel ifadeleri ispatlamaya çalışmışlardır. Diğer kategorisinde ise yine yanlış olan bu ifadelere karşı ispat oluşturma süreci işleten öğrenci cevapları yer almaktadır. Yalnız bu öğrencilerin, ispat oluştururlarken kullandıkları açıklamalar matematiksel olarak hiçbir anlam ifade etmemektedir. Birinci soru için diğer kategorisinde yer alan bir öğrencinin cevabı ise aşağıda verilmiştir.

HG:

$(f.g)(a) = f(a).g(a)$ "sürekli iki fonksiyonun çarpımı da süreklidir" teoreminden yola çıkarsak bir sürekli ve bir sürekli olmayan iki fonksiyonun çarpımı sürekli değildir.

:

**Problem 1** ile ilgili öğrenci cevapları

ZK:

Eğer f fonksiyonu a'da sürekli ise;

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 = f(a)$

Eğer g fonksiyonu a'da sürekli değil ise;

1- $\lim_{x\to a} g(x)$ yoktur. veya 2- $\lim_{x\to a} g(x) = L_2 \neq g(a)$ dır.

$\lim_{x\to a} (f.g)(x) = L_1.L_2 \neq f(a).g(a)$ olur. Bu durumda süreklilik tanımına ters d'dir. Dolayısıyla f.g sürekli değildir.

İspat oluşturma sürecine giren öğrencilerin çoğu yukarıdaki öğrencinin cevabına benzer cevaplar vermişlerdir. Bir noktada sürekli olan bir fonksiyonunun limiti ile aynı noktada sürekli olmayan bir fonksiyonun limitinin çarpımının ayrı ayrı o noktanın fonksiyonlardaki değerleri çarpımına eşit olamayacağı fikri ortaya atılmıştır. Böyle bir kanıya nasıl varıldığı konusunda hiçbir mantıksal açıklama mevcut değildir.

Bazı öğrenciler ise şöyle bir ispat oluşturmuşlardır.

$\lim_{x\to a^+} f(x) = k,\ \ \lim_{x\to a^-} f(x) = k\ ve\ f(a) = k\ olup\ f(x) süreklidir. \lim_{x\to a^+} g(x) = \ell_1\ ve$

$\lim_{x\to a^+} = \ell_2 olup\ \ell_1 \neq \ell_2\ olup\ g(x) süreksizdir. O\ halde\ \lim_{x\to a^+} (f.g)_{(x)} = k.\ell_1\ ve\ \lim_{x\to a^-} (f.g)(x) = k.\ell_2 dir.$

$k.\ell_1 \neq k.\ell_2\ olup\ f.g\ fonksiyonu\ a\ noktasında\ sürekli\ değildir.$

Bu şekilde ispat yapan öğrenciler süreklilik ile ilgili önemli bir noktayı kaçırmaktadırlar. Bir fonksiyonunun bir noktada sürekli olmaması sadece o noktada o fonksiyon için alınan sağ ve sol limitin eşit olmaması anlamına gelmemektedir. Yukarıdaki örneklere benzer olarak verilen öğrenci cevapları ispat olarak kodlanmıştır.

Tamamlanmamış kategorisinde yer alan öğrenci cevaplarından biri de şu şekildedir.

EK:

$f(x) = x^2 - 1$
$g(x) = \frac{1}{x-1}$ olsun $\quad (f.g)(x) = (x^2-1)\frac{1}{x-1} = x+1$ fonksiyonu

$a=1$ $g(1)$ sürekli değil $\quad a=1$ noktasında süreklidir.

Yukarıdaki cevap incelendiğinde verilen bir ters örnekle karşılaşılmaktadır. $f(x) = x^2 - 1$fonksiyonu x=1 noktasında sürekli iken $g(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonu x=1 noktasında sürekli değildir. Buraya kadar hiçbir problem söz konusu değildir. Yalnız bu öğrenci şunu bilmemektedir: İki fonksiyonun çarpımının tanım kümesini, bu çarpım fonksiyonunu oluşturan fonksiyonların tanım kümelerinin kesişimi oluşturur. Yani x=1 noktası $f.g(x) = x + 1$ fonksiyonunun tanım kümesinde yer almamaktadır. Bu nedenle $f.g$ fonksiyonunun x=1 noktasında sürekliliği incelenemez. Ters örneğin mevcut olduğu fakat mantıksal hatalar içeren bu tür öğrenci cevapları ise tamamlanmamış olarak kodlanmıştır.

**Problem 3** ile ilgili öğrenci cevapları

ŞÇ:

$f^2$ a noktasında sürekli ise,

$\lim_{x\to a} f^2(x) = f^2(a)$ olur.

$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)\cdot f(x)}_{} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} f(x) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^2 = f^2(a)$

iki fonksiyonun çarpımının limiti, limitler çarpımına eşittir.

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu o noktasında süreklidir.

ŞÇ olarak kodlanan öğrenci yanlış olan bu matematiksel ifade için ispat yapmıştır. Bu öğrenci x=a noktasında $\lim_{x\to a} f^2(x) = f^2(a)$ eşitliği üzerinde kendine göre limitin bazı özelliklerini kullanarak $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olması gerektiğini ortaya koymuştur. Ulaşılan sonuç doğrudur. Yalnız bu sonuca ulaşmak için izlenen yolda limit sembolü üzerinde gerçekleştirilmiş bazı doğru olmayan değişimler söz konusudur. Yukarıdaki öğrenci cevabına benzer öğrenci cevapları ispat olarak kodlanmıştır.

EÖ:

3) $f^2(x) = (x+1)^2$ fonksiyonu $x=-1$ noktasında süreklidir,

$f(x) = |x+1|$ fonksiyonu $x=-1$ noktasında sürekli değildir, çünkü;

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= -x-1\\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= x+1\end{aligned}\right\} \lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

olup $f(x)$ fonksiyonu $x=-1$ noktasında süreksizdur.

Yukarıdaki cevap incelendiğinde bir ters örnek verilmiştir. Verilen bu ters örnek ifadeyi çürütmek için ise yeterli değildir. Gerçektende $f^2(x) = (x+1)^2$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında süreklidir. Fakat $f(x) = |x+1|$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli değildir ifadesi yanlıştır. Çünkü bu fonksiyon $x = -1$ noktasında süreklidir. EÖ, bu fonksiyonun $x = -1$ noktasında sürekli olmamasının sebebini bu fonksiyon üzerinde $x = -1$ noktasında alınan sağ ve sol limitlerin birbirine eşit olmamasından kaynakladığını söylemiştir. Oysa $x = -1$ noktasında bu fonksiyonun hem sağ hem de sol limiti sıfırdır. Yani bu $f(x) = |x+1|$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında süreklidir. Bu ve buna benzer öğrenci cevapları ise yetersiz olarak kodlanmıştır.

3'üncü soruya verilen yanıtlar incelendiğinde on üç öğrenci doğru ters örnek vermiştir. Hiçbir soruda doğru cevaba ulaşılmazken bu soruda doğru ters örneklerin var olması bu soruyu diğerlerinden farklı kılmaktadır. Bu öğrencilerin büyük bir kısmı f(x) fonksiyonunu karekök fonksiyonu oluşturacak şekilde belirlemişlerdir. Negatif sayılar için bu karekök fonksiyonunun limiti alındığında yaklaşılan noktanın reel sayılara ait olmadığı şeklinde bir ortak görüşe varılmıştır. Bu şekilde cevap veren öğrenciler yeterli olarak kodlanmıştır. .

## Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerine süreklilik kavramıyla ilgili ispat ve ters örnek oluşturmak için beş açık uçlu soru yöneltilmiştir. Katılımcı öğrenciler dikkate alındığında, bu öğrenciler Analiz-I dersini almış, Analiz-II dersini de halen almakta olan öğrenciler olduğundan, bu araştırmada ispat oluşturulması gereken sorulara cevap vermeleri beklenmektedir. Fakat çalışmanın sonunda ispat gerektiren tüm sorularda öğrencilerin hiçbiri doğru bir ispat süreci geliştirememişlerdir. Problemin çözümü için ters örnek gerektiren sorularda ise, öğrenciler ispat geliştirme sorularına göre daha başarılı olmuşlardır. Bu sonuçlar Ko ve Knuth'un (2009a) ile benzerlik göstermektedir.

Tall'ın (1989) belirttiği gibi matematiksel ispat oluşturma zorluğunun sebebi matematiksel kavramlarla ilgili tanımların yetersiz verilmesidir. İspat gerektiren sorularda öğrencilerin cevaplarına bakıldığında genelde tek bir tanım üzerinden ispat oluşturmaya çalıştıkları görülmüştür. Öğrenci zihninde süreklilik kavramına ilişkin tanımlar, tek boyutta kalmıştır. Hatta ispat oluşturmak için yapılan tanımların bazıları da doğru değildir. Bu durum sadece tanımlarla da sınırlı değildir. Çoğu öğrencinin cevabı ispat olarak kabul edilemeyecek ifadeler içermektedir. Bu ifadelerin doğruluk payı yoktur. Bu tarz öğrenci cevapları referanssız-sembolik olarak kodlanmıştır. Bu kod Harel ve Sowder'ın (1998) çalışmalarında yer alan ispatlama şemalarından biridir. Ayrıca bu kodda yer alan öğrenci cevapları Ko ve Knuth'un (2009a) çalışmasıyla benzerlik gösterse de 151 öğrencinin katıldığı bu çalışmada referanssız-sembolik kodunun yüzdelik payı Ko ve Knuth'un çalışmasındakine göre daha düşüktür. Farklı olarak oluşturulan diğer kodunda yer alan öğrencilerin yüzdeleri oldukça yüksektir. Diğer kodu, genelde ifadeyi yanlış anlayan öğrenci cevapları ile diğer hiçbir kategoriye yerleştirilemeyen öğrenci cevaplarını içerir. Bu da bize matematiksel bir ispat oluşturmada Ko ve Knuth'un (2009a) belirttiği gibi okuma, yazma ve anlamanın önemini ortaya koyar. Ko'nun (2010) çalışmasında olduğu gibi, bu çalışmada da öğrencilerin matematiksel bir iddiaya ispat oluşturmada zorlandıkları ortaya konmuştur. Bu öğrenciler, matematiksel iddialara ters örnek oluştururken, ispat oluşturma kadar zorlanmamışlardır. Ters örnek oluşturamayan öğrencilerin bir kısmı ispatta oluşturamamıştır. Bu durumda ters örnek geliştirmenin ispat geliştirme sürece üzerinde etkili olduğu söylenebilir (Whiteley, 2009). Öğrenciler, analiz dersinde onlara verilenleri yazmaktan öteye gidememişlerdir. Bu durumun ortadan kaldırılması için analiz derslerinde ters örneklerle oluşturulacak bir bilişsel çatışma ortamının (Zazkis and Chernoff, 2008) etkili olacağı düşünülmektedir. Yani ileri düzeyde matematik dersi verilen sınıflar içerisinde gerçekleştirilen farklı stratejiler ile öğrencilerin hem ispat oluşturma hem de ters örnek verme becerileri geliştirilebilir.

## Kaynakça

Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior 24,* 125–134.

Balacheff, N. (1991a). Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. In A. In A. J. Bisop, E. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.). Mathematical knowledge: Its growth through teaching. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. 175- 192.

Bills, L., Dreyfus, T.,Mason, J., Tsamir, P.,Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification inmathematics education. In J. Novotná, H.Moraová,M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1* (pp. 126–154). Prague: Czehia.

Baştürk, S & Dönmez, G. (2011). Mathematics student teachers' misconceptions on the limit and continuity concepts. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education, 5* (1), 225-249.

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics *Educational Studies in Mathematics*, *10* (3), 361-366.

Bergqvist, E (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior 26,* 348–370.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 487–500.

Bishop, S. Mellin-Olsen and J. van Dormolen (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer, Dordrecht, 175-192.

Goetting, M. (1995). The College Student's Understanding of Mathematical Proof, Doctoral Dissertation, University of Maryland.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, and E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* American Mathematical Society, Providence, RI, 234-283.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 31* (4), 396-428.

Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics 16* (4), 10-20.

Ko, Y. Y. (2010). Proofs and Counterexamples: Undergraduate Students' Strategies for Validating Arguments, Evaluating Statements and Constructing Productions , Ph.D. Dissertation, The University of Wisconsin-Madison.

Ko, Y.Y. & Knuth E. (2009a). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 28 , 68–77.

Ko, Y. Y. & Knuth, E. (2009b). Problems manifested in prospective secondary mathematics teachers' proofs and counterexamples in differentiation. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 1* Taipei, Taiwan (pp. 262-267).

Lin, F. L. (2005). Modelling students' learning on mathematical proof and refutation. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 2* Melbourne, Australia, (pp. 3–18).

Lithner, J (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior 23*, 405-427.

Martin, W.G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (1), 41-51.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-example that (only) prove and Counter-example that (also) explain. *Focus on Learning Problems in mathematics, 19*, 49–61.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher 78* (6), 448-456.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks, *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 258–288

Tall, D (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching,* 28–32.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,12*(2), 151–169.

Umay, A. (2003). Mathematical reasonıng ability. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 24,* 234-243.

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 425–432.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56* (2/3), 209-234.

Whiteley, W. (2009). Refutations: the role of counter-examples in developing proof. . In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. Villiers (Eds), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, vol. 2* Taipei, Taiwan (pp. 257-262).

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008).What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 195–208.