

## FREE VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS SUBJECTED TO AXIAL LOAD UNDER VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

Mesut ŞİMŞEK\*

*Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yıldız-İSTANBUL*

**Geliş/Received: 16.12.2004 Kabul/Accepted: 11.05.2005**

---

### ABSTRACT

In this study, free vibration of beams subjected to axial loads and having different boundary conditions is analyzed within the frame of the Bernoulli-Euler beam theory. The Lagrange equations are used to examine the free vibration characteristics of the beams. The constraint conditions of the supports are taken into account by using very stiff linear spring constants. For applying the Lagrange equations, trial functions denoting the deflection of the beam is expressed in the form of power series. By using the Lagrange equations, the problem is reduced to the solution of a system of algebraic equations. The first six eigenvalues of the beams are calculated and tabulated for different values of the axial load. It is thought that the tabulated results will prove useful to designers and provide a reference against which other researchers can compare their results.

**Keywords:** Free vibrations of beam, compressive and tensile axial loads, Lagrange equations.

### EKSENEL KUVVET ETKİSİNDEKİ KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN FARKLI SINIR KOŞULLARI ALTINDA İNCELENMESİ

#### ÖZET

Bu çalışmada farklı sınır koşullarına sahip ekstenel kuvvet etkisindeki kirişlerin serbest titreşimleri Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Problemin çözümü için Lagrange denklemleri kullanılmıştır. Problemden sınır koşulları rijit yaylarla sağlanmıştır. Çalışmada, Lagrange denklemlerinin uygulanması için kirişin düşey yerdeğiştirmelerini ifade eden çözüm fonksiyonunun oluşturulmasında kuvvet serileri kullanılmıştır. Lagrange denklemleri kullanılarak problem cebrik denklemler sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Problemden, farklı sınır koşullarına sahip ekstenel kuvvet etkisindeki kirişlerin ilk altı moduna ait özdeğerleri, ekstenel kuvvetin farklı değerleri için çizelgeler halinde verilmiştir. Çizelgeleştirilen sonuçların tasarımcılar için faydalı olacağı ve diğer araştırmacıların sonuçlarını karşılaştırmada referans oluşturabileceği düşünülmektedir.

**Anahtar Sözcükler:** Kiriş serbest titreşimleri, Ekstenel basınç ve çekme kuvveti, Lagrange denklemleri.

---

## 1. GİRİŞ

Ekstenel yüke maruz kirişlerin titreşiminin uygulamada ayrı bir önemi olup inşaat, makine ve uçak mühendisliğinde geniş bir uygulama sahasına sahiptir. Örneğin inşaat mühendisliğinde, büyük

---

\* e-posta: msimsek@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 259 70 70 / 2452

açıklıkları geçebilmek için köprü yapımında kullanılan kirişler öngerme veya artgerme teknikleri ile üretilirler. Bu teknikler yardımıyla kesitte oluşan çekme gerilmelerinin büyük ölçüde azaltılması ve hatta yok edilmesi yoluyla köprü kiriş elemanları daha etkin bir şekilde kullanılabilir. Bu bağlamda, uzun yıllardan beri eksenel yük etkisindeki kirişlerin dinamik davranışlarının incelenmesi araştırma konusu olmuştur. Aşağıda bu konuda yapılmış olan önemli bazı teorik çalışmalar özetlenmiştir.

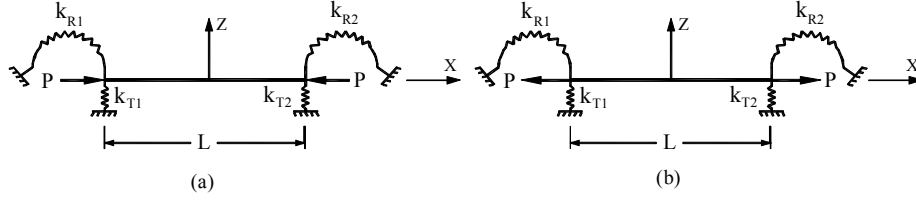
Bu konuda yapılan ilk çalışmalara örnek olarak Timoshenko ve Young [1] ve Fyrba'nın [2] eksenel kuvvet etkisindeki tek açıklıklı kirişler üzerine yaptıkları çalışmalar gösterilebilir. Her iki çalışmada da kirişe ait serbest titreşim frekans denklemleri analitik olarak elde edilmiştir. Bokaian [3-4] farklı sınır koşullarına sahip eksenel kuvvet etkisi altındaki tek açıklıklı kirişler için, eksenel kuvvetin kirişin serbest titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Bu çalışmalarda problem, statik eksenel yük basınç [3] ve çekme [4] alınarak analitik olarak incelenmiştir. Laura et al. [5] tekil kütle taşıyan ve eksenel yüke maruz sürekli kirişlerin serbest titreşimini klasik Ritz yöntemiyle sayısal olarak incelemiştir. Kukla [6] elastik ara mesnetleri olan ve bir noktada toplanmış tekil kütle taşıyan eksenel yüke maruz kirişlerin serbest titreşimlerini Green fonksiyonlarını kullanarak analitik olarak incelemiştir. Dikdörtgen plakların serbest titreşim analizinde de kullanılan Green fonksiyonları, frekans denklemini  $N-1$ . dereceden determinant yardımıyla ifade etmeye olanak sağlar [6]. Virgin ve Plaut [7] eksenel yük etkisindeki üniform kirişlerin harmonik yayılı yükler altında zorlanmış titreşimini analitik olarak incelemiştir. Bu çalışmada yayılı yük harmonik olarak değişmekte olup eksenel kuvvet çekme veya basınç olabilir. Nallim ve Grossi [8] eksenel çekme kuvveti etkisindeki kirişlerin serbest titreşim karakteristiklerini incelemek için, karakteristik ortogonal şekil fonksiyonları kullanarak Rayleigh-Ritz metoduna dayanan basit bir varyasyonel yöntem geliştirmişlerdir. Luo [9] açıklığının tam ortasında tekil harmonik yük bulunan, eksenel yük etkisindeki sonlu ve üniform Bernoulli-Euler kirişinin zorlanmış titreşimlerini incelemiştir.

Bu çalışmada, eksenel basınç ve çekme kuvveti etkisindeki tek açıklıklı kirişlerin serbest titreşimi Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde enerji yaklaşımıyla formüle edilerek sayısal olarak incelenmiştir. Problemin çözümü için Lagrange denklemleri kullanılmış olup, kirişin gerçek yerdeğiştirmelerine kuvvet serileri ile yaklaşım sağlanmıştır. Mesnet koşulları lineer elastik olan, çökme ve dönmeye karşı çok rijit yaylarla sağlanmıştır. Çalışmada iki ucu ankastre mesnetli, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli, iki ucu basit mesnetli, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu boşta ve her iki ucu boşta olan kirişler gözönüne alınmıştır. Sınır koşullarının sağlatılmasına örnek verilirse, iki ucu ankastre kiriş için her iki uçtaki çökme ve dönme yaylarının yay sabitleri büyük değerler olarak alınmış, iki ucu basit mesnetli kiriş için ise dönmeye karşı elastik yayların katsayıları 0, çökme yaylarının katsayıları ise büyük değerler olarak alınmıştır. Kirişe ait enerji ifadeleri çıkarıldıktan sonra, bu ifadelerde yer değiştirme fonksiyonunun yerine, yaklaşım (deneme) fonksiyonu olarak seçilen kuvvet serisi ifadesi konulmuş ve problem Lagrange denklemlerinin kullanımıyla özdeğer problemine indirgenmiştir. Yukarıda bahsedilen sınır şartlarına sahip kirişlerin ilk altı moduna ait özdeğerleri eksenel kuvvetin farklı değerleri için elde edilerek çizelgeler halinde verilmiştir. Elde edilen sayısal değerler literatürde mevcut olan sonuçlarla kıyaslanmış ve farklı sayıda kuvvet serisi terimleri alınarak yakınsama çalışması da yapılmıştır.

## 2. TEORİ VE FORMÜLASYON

$P$  eksenel kuvveti etkisindeki  $L$  açıklıklı üniform Bernoulli-Euler kirişleri Şekil 1'de gösterilmiştir. Koordinat eksenlerinin başlangıcı kirişin orta noktası olarak seçilmiştir. Kirişin her iki ucunda çökme ve dönmeye karşı elastik yaylar bulunmaktadır. Sınır koşulları, bu yaylara ait yay sabitlerinin değerleri ilgili sınır koşuluyla uyumlu olacak şekilde değiştirilerek sağlanmıştır.

**Free Vibration Analysis of Beams Subjected...**



**Şekil 1.** (a) Tek açıklıklı eksenel basınç kuvveti, (b) tek açıklıklı eksenel çekme kuvveti etkisindeki çökme ve dönmeye karşı elastik mesnetli kiriş.

Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre, eğilme sebebiyle herhangi bir  $t$  anı için kirişe ait iç potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI(X) \left( \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (1)$$

şeklindedir. Burada  $E$  Young modülü,  $I$  kesitin atalet momenti ve  $W(X,t)$  kirişin yer değiştirme fonksiyonudur. Dönme eylemsizliğinin ihmal edilmesi halinde herhangi bir  $t$  anı için kirişin kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho A(X) \left( \frac{\partial W(X,t)}{\partial t} \right)^2 dX \quad (2)$$

Kinetik enerji ifadesindeki  $\rho$  kirişin kütle yoğunluğu,  $A$  ise kirişin enkesit alanıdır.

Kirişe etki eden  $P$  eksenel kuvvetine ait potansiyel enerji ifadesi herhangi bir  $t$  anı için aşağıdaki şekildedir:

$$V = -\frac{P}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \right)^2 dX \quad (3)$$

Çökme ve dönmeye karşı elastik mesnetlerde ortaya çıkan şekildeğiştirme enerjileri, sırasıyla, aşağıdaki gibidir:

$$F_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{Ti} [W(X_{Mi}, t)]^2 \quad (4a)$$

$$F_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{Ri} [W'(X_{Mi}, t)]^2 \quad (4b)$$

Yukarıda verilen (4) numaralı bağıntılarındaki  $k_{Ti}$  ve  $k_{Ri}$  çökme ve dönme yaylarının yay katsayılarını ve  $X_{Mi}$  ise mesnetlerin koordinatlarını göstermektedir. Yukarıda (1)-(4) bağıntılarında verilen enerji ifadelerini boyutsuz büyüklükler cinsinden yazabilmek için aşağıdaki boyutsuz ifadeler tanımlanmıştır:

$$x = \frac{X}{L}, \quad \bar{w} = \frac{W}{L} \quad (5)$$

Bu durumda herhangi bir  $t$  anı için kirişe ait potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$U = \frac{1}{2L} \int_{-0.5}^{0.5} EI(x) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6a)$$

$$K_e = \frac{L^3}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \rho A(x) \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6b)$$

Eksenel  $P$  kuvvetine ait potansiyel enerji ile elastik mesnetlerde ortaya çıkan şekildeğiştirme enerjisi ifadeleri ise izleyen şekilde yazılabilir:

$$V = -\frac{PL}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7a)$$

$$F_T = \frac{L^2}{2} \sum_{i=1}^2 k_{T_i} [\bar{w}(x_{M_i}, t)]^2 \quad (7b)$$

$$F_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_{R_i} [\bar{w}'(x_{M_i}, t)]^2 \quad (7c)$$

Geometrik sınır koşullarını sağlayan bazı ifadeler  $\bar{w}(x,t)$  için seçilir ve seçilen fonksiyonla birlikte Lagrange eşitlikleri kullanılarak doğal sınır koşulları da sağlatılır. Lagrange eşitlikleri kullanılarak, yerdeğiştirme fonksiyonu olan  $\bar{w}(x,t)$  nin kabul edilebilir fonksiyonların lineer serisi olarak temsil edilmesiyle ve serideki katsayıların Lagrange eşitliğini sağlayacak şekilde ayarlanmasıyla yerdeğiştirme fonksiyonu için bir yaklaşık çözüm bulunur. Lagrange eşitliğinin uygulanması için deneme fonksiyonu olan  $\bar{w}(x,t)$  ifadesine uzay bağımlı  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{N-1}$  koordinatları ve zaman bağımlı genelleştirilmiş  $q_n(t)$  büyüklükleriyle yaklaşım sağlanmıştır. Böylece kiriş için yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki kuvvet serisi şeklinde elde edilir:

$$\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) x^{n-1} \quad (8)$$

Kirişin serbest titreşimi için zamana bağımlı genelleştirilmiş koordinat olan  $q_n(t)$  aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$q_n(t) = \bar{q}_n e^{i \omega t} \quad (9)$$

Kirişe ait boyutsuz yerdeğiştirme fonksiyonunun genliği de aşağıdaki şekilde olur:

$$w(x) = \sum_{n=1}^N \bar{q}_n x^{n-1} \quad (10)$$

Probleme ait fonksiyonel izleyen formda tanımlanabilir:

$$L = K_e - (U + V + F_T + F_R) \quad (11)$$

Yukarıdaki (11) denklemleri ifade edilen probleme ait fonksiyonele aşağıda verilen Lagrange denklemleri uygulanabilir:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (12)$$

Lagrange denklemlerindeki üstte görülen nokta zamana göre türevi göstermektedir. Problemin sayısal analizinde izleyen boyutsuz büyüklükler kullanılacaktır:

$$\kappa_{T_j} = \frac{k_{T_j} L^3}{EI}, \quad \kappa_{R_j} = \frac{k_{R_j} L}{EI}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad T = \frac{PL^2}{EI}. \quad (13)$$

Lagrange denklemlerinin uygulanmasıyla aşağıdaki verilen lineer homojen denklem takımı elde edilir:

$$[A]\{\bar{q}\} - \lambda^2 [B]\{\bar{q}\} = \{0\} \quad (14)$$

### Free Vibration Analysis of Beams Subjected...

(14) denklemindeki  $[A]$  ve  $[B]$  matrisleri katsayılar matrisi olup, elemanları izleyen şekildedir.

$$A_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} (x^{k-1})'' (x^{m-1})'' dx - T \int_{-0.5}^{0.5} (x^{k-1})' (x^{m-1})' dx + \kappa_{Tj} (x_{Mi}^{k-1}) (x_{Mi}^{m-1}) + \kappa_{Rj} (x_{Mi}^{k-1})' (x_{Mi}^{m-1})' dx$$
$$B_{km} = \int_{-0.5}^{0.5} (x^{k-1}) (x^{m-1}) dx, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (15)$$

Kirişle ait özdeğerler olan boyutsuz  $\lambda$  parametreleri, (14) numaralı denklem sisteminin trivial çözümünden başka bir çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması şartından elde edilir.

### 3. SAYISAL HESAPLAMALAR


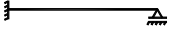



Bu çalışmada, eksenel yükün (basınç veya çekme olması durumunda) kirişlerin serbest titreşimi üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Bu amaçla, değişik sınır koşullarına sahip kirişlerin ilk altı titreşim moduna ait boyutsuz frekans parametresi  $\lambda$ , eksenel yük parametresi  $T$  nin çeşitli değerleri için elde edilerek çizelgeler halinde verilmiştir. Bu çalışmada, eksenel yükün işaretinin basınç olması durumu (+), çekme olması durumu ise (-) olarak kabul edilmiştir. Eksenel yükün basınç olması durumunda, boyutsuz eksenel yük parametresi  $T = 5, 10, 20$ , çekme olması durumunda  $T = -5, -10, -20$  olarak seçilmiştir.  $T = 0$  olması ise eksenel yükün sıfır olduğu duruma karşı gelmektedir. Sınır koşulları daha önceden de belirtildiği gibi, arzu edilen sınır koşuluna uygun rijitlikte yay katsayıları dikkate alınarak sağlanmıştır. Problemden ele alınan sınır koşulları ve herbir sınır koşuluna karşı gelen boyutsuz yay parametreleri  $\kappa_{Ti}$  ve  $\kappa_{Ri}$  ile kirişleri tanımlamada kolaylık sağlaması amacıyla, farklı sınır koşullarına sahip olan sözkonusu kirişlere verilen tanımlar Çizelge 1’de toplu olarak belirtilmiştir. Eksenel çekme kuvveti etkisindeki M-M ve A-A kirişleri için kuvvet serisi terim sayısı  $N = 8, 10, 12, 14, 16, 18$  alınarak yapılan yakınsama çalışması sonuçları Çizelge 2-3’de verilmiş ve yine aynı çizelgede, elde edilen sonuçlar Kaynak [8]’de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Elde edilen sonuçların mevcut sonuçlarla kıyaslanmasına başka bir örnek olarak açıklığı  $L = 20$  m, birim boy kütlesi  $\rho A = 1000$  kg/m, kesit atalet momenti  $I = 0.08824$  m<sup>4</sup> ve elastisite modülü  $E = 34000$  MPa ( $EI = 3 \cdot 10^9$  Nm<sup>2</sup>) olan eksenel yük etkisindeki bir M-M kirişi gözönüne alınmıştır. Hesaplarda eksenel kuvvetin  $P = 0, -1 \cdot 10^3$  kN,  $1 \cdot 10^3$  kN değerleri için ilk altı moda ait boyutsuz frekans parametreleri hesaplanmış ve boyutsuz frekans parametresi  $\lambda$  ’nın (13) bağıntısında verilen tanımından, gözönüne alınan kirişin ilk altı doğal titreşim frekansı elde edilmiştir. Elde edilen değerler, Timoshenko ve Young [1] ve Fyrba [2] tarafından eksenel yük etkisindeki M-M kirişinin doğal frekanslarının hesabı için  $\omega_i = (a^2 \pi^2 / L^2) \sqrt{1 - PL^2 / i^2 EI \pi^2}$  şeklinde verilen formülden elde edilen sonuçlarla Çizelge 4’de karşılaştırılmıştır. Burada  $\omega_i$  kirişin doğal frekansı olup,  $a$  parametresi ise  $a = \sqrt{EI / \rho A}$  şeklinde verilmektedir.

Çizelge 2 ve Çizelge 3’de verilen yakınsama çalışmalarından görüldüğü üzere kuvvet serisi terim sayısının artmasıyla elde edilen özdeğerlerin değerlerinin azaldığı, yani kesin değerlere üstten bir yakınsama olduğu görülmüştür. Terim sayısı  $N = 8$  olarak alındığında ilk iki modda çok iyi sonuçlar elde edilmiş, beşinci ve altıncı modların elde edilebilmesi içinse terim sayısının artırılması gerektiği görülmüştür. Ayrıca, Çizelge 4’den de görülebileceği gibi kuvvet serilerinin ilk modlarda (ilk beş mod) çok iyi sonuç verdiği, daha yüksek modlarda ise elde edilen

sonuçların kesin sonuçlardan bir miktar saptığı görülmüştür. Ayrıca, Çizelge 2-4'den elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut sonuçlarla ([1,2,8]) iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir.

**Çizelge 1.** Gözönüne alınan sınır koşulları ve ilgili sınır koşuluna karşı gelen  $\kappa_{T_i}$  ve  $\kappa_{R_i}$  parametreleri.

Sınır Koşulları	Kiriş Tanımı	Sol Mesnet	Sağ Mesnet
	A-A	$\kappa_{T1} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R1} = 10^8 \approx \infty$	$\kappa_{T2} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R2} = 10^8 \approx \infty$
	A-M	$\kappa_{T1} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R1} = 10^8 \approx \infty$	$\kappa_{T2} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R2} = 0$
	M-M	$\kappa_{T1} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R1} = 0$	$\kappa_{T2} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R2} = 0$
	A-S	$\kappa_{T1} = 10^8 \approx \infty$ $\kappa_{R1} = 10^8 \approx \infty$	$\kappa_{T2} = 0$ $\kappa_{R2} = 0$
	S-S	$\kappa_{T1} = 0$ $\kappa_{R1} = 0$	$\kappa_{T2} = 0$ $\kappa_{R2} = 0$

**Çizelge 2.** M-M kirişi için yakınsama ve kıyaslama çalışması,  $T = -10$ .

Metod	$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
(1)	8	14.00382	44.19715	95.15800	169.40116	-	-
	10	14.00382	44.19654	93.71406	163.04420	271.66404	408.31047
	12	14.00382	44.19654	93.69316	162.83927	252.79029	364.18403
	14	14.00382	44.19654	93.69316	162.83699	251.71424	360.40397
	16	14.00382	44.19654	93.69316	162.83699	251.69044	360.27168
	18	14.00382	44.19654	93.69316	162.83683	251.69029	360.26878
Ref. [8]		14.00375	44.19648	93.69313	162.83758	252.27915	-*

(1) Bu çalışma, - \* Hesaplanmamış.

**Çizelge 3.** A-A kirişi için yakınsama ve kıyaslama çalışması,  $T = -20$ .

Metod	$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
(1)	8	27.27485	68.72474	134.75349	229.07875	-	-
	10	27.27424	68.70765	129.02183	209.45762	360.53077	538.83735
	12	27.27424	68.70765	128.81935	208.28773	311.76139	438.51051
	14	27.27424	68.70765	128.81767	208.26545	307.42012	426.54045
	16	27.27424	68.70765	128.81767	208.26530	307.27134	425.92384
	18	27.27424	68.70735	128.81767	208.26393	307.26921	425.90583
Ref. [8]		27.27422	68.70763	128.81772	208.28133	307.50742	-*

(1) Bu çalışma, - \* Hesaplanmamış.

**Çizelge 4.** M-M kirişi için yakınsama ve kıyaslama çalışması.

$P$ (kN)	$N$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
$P = 0$	10	42.7362	170.9466	384.7235	684.7015	1155.6048	1747.5365
	12	42.7362	170.9466	384.6307	683.7969	1073.2305	1555.5748
	14	42.7362	170.9466	384.6295	683.7860	1068.5211	1539.1009
	16	42.7362	170.9466	384.6295	683.7860	1068.4161	1538.5221
$P = 1 \cdot 10^3$	10	42.4468	170.6573	384.4354	684.4134	1155.3253	1747.2616
	12	42.4468	170.6573	384.3414	683.5076	1072.9425	1555.2873
	14	42.4468	170.6573	384.3414	683.4979	1068.2318	1538.8122
	16	42.4468	170.6573	384.3414	683.4979	1068.1268	1538.2334
$P = -1 \cdot 10^3$	10	43.0242	171.2347	385.0123	684.9901	1155.8836	1747.8114
	12	43.0242	171.2347	384.9183	684.0855	1073.5186	1555.8615
	14	43.0242	171.2347	384.9183	684.0745	1068.8092	1539.3896
	16	43.0242	171.2347	384.9183	684.0745	1068.7042	1538.8108
Timoshenko ve Young [1]	$P = 0$	42.7366	170.9465	384.6297	683.7862	1068.4160	1538.5190
	$P = 1 \cdot 10^3$	42.4469	170.6576	384.3409	683.4975	1068.1273	1537.8694
	$P = -1 \cdot 10^3$	43.0243	171.2349	384.9183	684.0748	1068.7046	1539.1684
Fyrba [2]	$P = 0$	42.7366	170.9465	384.6297	683.7862	1068.4160	1538.5190
	$P = 1 \cdot 10^3$	42.4469	170.6576	384.3409	683.4975	1068.1273	1537.8694
	$P = -1 \cdot 10^3$	43.0243	171.2349	384.9183	684.0748	1068.7046	1539.1684

**Çizelge 5.** Farklı  $T$  değerleri için A-A kirişinin ilk altı titreşim moduna ait  $\lambda_i$  boyutsuz frekans parametreleri.

$T$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$T = -20$	27.27424	68.70765	128.81767	208.26530	307.27134	425.92384
$T = -10$	24.95750	65.29212	124.92500	204.10636	302.94578	421.48475
$T = -5$	23.70429	63.51020	122.93113	201.99424	300.75935	419.24751
$T = 0$	22.37327	61.67289	120.90339	199.85939	298.55690	416.99806
$T = 5$	20.94886	59.77485	118.84025	197.70133	296.33781	414.73640
$T = 10$	19.40986	57.81013	116.73988	195.51902	294.10194	412.46223
$T = 20$	15.84754	53.64982	112.41935	191.07902	289.57786	40.75747

Bilindiği gibi kirişe etkiyen aksenal kuvvet basınç olduğunda kirişin doğal titreşim frekanslarının değerleri azalmakta, çekme olduğunda ise artmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sayısal değerler incelendiğinde de aynı sonuca varıldığı görülmektedir.

**Çizelge 6.** Farklı  $T$  değerleri için A-M kirişinin ilk altı titreşim moduna ait  $\lambda_i$  boyutsuz frekans parametreleri.

$T$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$T = -20$	21.55601	57.90626	112.90565	187.29148	281.26777	394.91615
$T = -10$	18.76014	54.08470	108.66371	182.83653	276.68815	390.25596
$T = -5$	17.17689	52.06626	106.47880	180.56755	274.36958	387.90489
$T = 0$	15.41816	49.96482	104.24766	178.26972	272.03117	385.53947
$T = 5$	13.41239	47.76969	101.96754	175.94169	269.67247	383.15940
$T = 10$	11.02134	45.46791	99.63493	173.58238	267.29286	380.76454
$T = 20$	1.51985	40.47447	94.79759	168.76487	262.46910	375.92872

**Çizelge 7.** Farklı  $T$  değerleri için M-M kirişinin ilk altı titreşim moduna ait  $\lambda_i$  boyutsuz frekans parametreleri.

$T$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$T = -20$	17.16972	48.45741	98.31916	167.61558	256.54533	365.16929
$T = -10$	14.00382	44.19654	93.69316	162.83699	251.69044	360.27168
$T = -5$	12.11433	41.90391	91.29219	160.39421	249.22752	357.79762
$T = 0$	9.86961	39.47837	88.82637	157.91374	246.76429	355.44013
$T = 5$	6.93260	36.89387	86.29023	155.39363	244.25157	352.93205
$T = 10$	-	-	-	-	-	-
$T = 20$	-	-	-	-	-	-

(-) Hesaplanmamıştır.

Çizelge 7-9'da (-) işareti, ilgili özdeğerin hesaplanmadığını belirtmektedir. Bunun nedeni şöyle açıklanabilir: S-S ve M-M kirişleri için Euler burkulma yükleri aynı olup  $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  dir. A-

S kirişi için ise  $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$  dir. Söz konusu kritik yükler boyutsuz eksenel yük parametresinde

( $T = PL^2 / EI$ ) yerine konulursa, S-S ve M-M kirişleri için kritik eksenel yük parametresi  $T_{kr} = \pi^2 \cong 9.87$ , A-S kirişi için ise kritik eksenel yük parametresi  $T_{kr} = \pi^2 / 4 \cong 2.47$  olarak elde edilir. Eksenel kuvvetin basınç olması durumunda, seçilen eksenel yük parametresi ( $T$ ), kritik eksenel yük parametresinden ( $T_{kr}$ ) büyük ise kiriş stabilitesini kaybederek burkulacağından titreşim olmayacak ve bu durumda özdeğer hesabı anlamını yitirecektir. Bu nedenle Çizelge 7-9'da



### Free Vibration Analysis of Beams Subjected...

M-M, A-S ve S-S kirişleri için sözkonusu aksel yük parametrelerinde özdeğer hesabı yapılmamıştır. A-A kirişinde  $P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ , A-M kirişinde ise  $P_{kr} = \frac{2 \cdot 05 \pi^2 EI}{L^2}$  dir. A-A kirişi için  $T_{kr} = 4\pi^2 \cong 39 \cdot 47$ , A-M kirişi için  $T_{kr} = 2 \cdot 05 \pi^2 \cong 20 \cdot 23$  elde edilir. Sayısal hesaplamalarda  $T$  parametresinin seçilen tüm değerleri, A-A ve A-M kirişlerinin kritik aksel yük parametresi değerlerinden küçük olduğu ( $T < T_{kr}$ ) için, sözkonusu tüm değerlerde özdeğer hesabı yapılmıştır.

**Çizelge 8.** Farklı  $T$  değerleri için A-S kirişinin ilk altı titreşim moduna ait  $\lambda_i$  boyutsuz frekans parametreleri.

$T$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$T = -20$	9.16084	33.12828	73.08433	132.17216	210.95817	309.50874
$T = -10$	7.16743	28.29429	67.65830	126.66999	205.48637	304.08226
$T = -5$	5.76820	25.40596	64.75120	123.82087	202.69279	301.33155
$T = 0$	3.51600	22.03453	61.69715	120.90187	199.85954	298.55522
$T = 5$	-	-	-	-	-	-
$T = 10$	-	-	-	-	-	-
$T = 20$	-	-	-	-	-	-

(-) Hesaplanmamıştır.

**Çizelge 9.** Farklı  $T$  değerleri için S-S kirişinin ilk altı titreşim moduna ait  $\lambda_i$  boyutsuz frekans parametreleri.

$T$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$T = -20$	38.12446	77.12577	135.41084	213.60160	311.72264	429.70146
$T = -10$	31.38923	69.88914	128.38233	206.85249	305.21263	423.38386
$T = -5$	27.30049	65.92521	124.70344	203.38768	301.90223	420.18791
$T = 0$	22.37327	61.67274	120.90339	199.85939	298.55369	416.96678
$T = 5$	15.81779	57.07084	116.97212	196.26472	295.16578	413.71986
$T = 10$	-	-	-	-	-	-
$T = 20$	-	-	-	-	-	-

(-) Hesaplanmamıştır.

Çizelge 5-9 incelendiğinde aksel kuvvetin, özellikle, kirişlerin birinci özdeğerleri üzerinde çok daha etkili olduğu, yüksek modlarda aksel yükün etkisinin giderek azaldığı dikkati çekmektedir. Örneğin A-A kirişinde  $T = \pm 5$  için, birinci özdeğerdeki mutlak değişim (artma veya

azalma) yaklaşık olarak %6 , ikinci özdeğerde %3 , üçüncü özdeğerde ise yaklaşık olarak %1·7 hesaplanmıştır. M-M kirişinde  $T = \pm 5$  için özdeğerlerdeki değişim miktarı yaklaşık olarak birinci özdeğerde %29 , ikinci özdeğerde %6·5 ve üçüncü özdeğerde %2·9 olarak hesaplanmıştır. Yukarıdaki basit hesaplamalar aksenal yük sebebiyle kirişlerin özdeğerlerindeki değişimde sınır koşullarının çok etkili olduğunu göstermektedir.

Ayrıca, bu çalışmada sınır koşullarının sağlanmasında kullanılan çökme ve dönme yaylarına ait parametrelerin  $\kappa_{Ti} = \kappa_{Ri} = 10^8 \approx \infty$  alınmasının yeterince iyi bir yaklaşım sağladığı görülmüştür.

#### 4. SONUÇLAR

Eksenal kuvvet etkisindeki kirişlerin serbest titreşimi Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde sayısal olarak incelenmiştir. Problemin çözümü için Lagrange denklemleri kullanılmış ve mesnet şartları uygun yay katsayıları seçilerek sağlanmıştır. Çalışmada, kirişin gerçek düzeyde yerdeğiştirmelerinin yerine, deneme fonksiyonu olarak kuvvet serisi seçilmiş ve Lagrange denklemleri kullanılarak problem cebrik bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Problemden, değişik sınır koşullarına sahip aksenal kuvvet etkisindeki kirişlerin ilk altı moduna ait özdeğerleri aksenal kuvvetin çeşitli değerleri için hesaplanarak çizelgeler halinde verilmiştir. Elde edilen sonuçlardan aksenal kuvvetin ve sınır koşullarının kirişlerin dinamik davranışı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca kıyaslama çalışmalarından görüldüğü gibi elde edilen sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla çok iyi bir uyum içindedir. Bu bağlamda Lagrange denklemlerinin ve deneme fonksiyonu olarak da kuvvet serilerinin kullanımının, aksenal yüklü kirişlerin dinamik davranışlarının incelemesinde uygun ve güvenilir bir yol olduğu sonucuna varılmıştır. Çizelgeleştirilen sonuçların tasarımcılar için faydalı olacağı ve diğer araştırmacıların sonuçlarını karşılaştırmada referans olacağına inanılmaktadır.

#### TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın teorik temellerinin oluşumunda ve çalışmanın hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Turgut Kocatürk'e teşekkürlerimi sunarım.

#### KAYNAKLAR

- [1] Timoshenko S. and Young D.H., "Vibration Problems in Engineering", Van Nostrand Company, New York, 324-365, 1955.
- [2] Fryba L., "Vibration of solids and Structures Under Moving Loads", The Netherlands, Noordhoff International, Groningen, 1972.
- [3] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under compressive axial loads", Journal of Sound and Vibration, 126, 49-56, 1988.
- [4] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under tensile axial loads", Journal of Sound and Vibration, 142, 481-498, 1988.
- [5] Laura P.A.A., Sarmiento S., Bergmann A.N., "A note on transverse vibrations of continuous beams subject to an axial force and carrying concentrated masses", Journal of Sound and Vibration, 86, 279-284, 1983.
- [6] Kukla S., "Free vibration of axially loaded beams with concentrated masses intermediate elastic supports", Journal of Sound and Vibration, 172, 449-458, 1994.
- [7] Virgin L. N. ve Plaut R. H., "Effect of axial load on forced vibrations of beams", Journal of Sound and Vibration, 168, 395-405, 1993.
- [8] Nallim L. G. ve Grossi R. O., "A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams", Applied Acoustic, 57, 345-356, 1999.
- [9] Y. Luo, "Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads", Journal of Sound and Vibration, 213, 791-800, 1998.