

**ON THE TRACE FORMULA OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION GIVEN WITH NON SEPERABLE BOUNDARY CONDITIONS**

**Azad BAYRAMOV, Serpil ÖZTÜRK USLU, Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN\***

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL*

**Geliş/Received: 24.05.2005 Kabul/Accepted: 03.10.2005**

**ABSTRACT**

In this study we obtained the formula of the regularized trace of the self adjoint operator which is formed by a second order differential equation and non seperable boundary conditions.

**Keywords:** Eigenvalue, Ortonormal eigenfunction, Asymptotic behaviour, Regularized trace.

**MSC number/numarası:** 34L05, 47A10.

**AYRILABİLİR OLMAYAN SINIR KOŞULLARI İLE VERİLMİŞ İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMİN İZ FORMÜLÜ ÜZERİNE**

**ÖZET**

Bu çalışmada ayrılabilir olmayan sınır koşulları ile verilmiş ikinci mertebeden diferansiyel denklem ile oluşturulan kendine eş bir operatörün düzenli izi için formül elde edilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Özdeğer, Ortonormal özfonksiyon, Asimtotik davranış, Düzenli iz.

**1. GİRİŞ**

$$\ell y = -y'' + p(x)y \quad (1)$$

ve

$$\ell_0 y = -y''$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y(0) = y(\pi) \quad (2)$$

$$y'(0) = y'(\pi)$$

sınır koşulları ile oluşturulmuş kendine eş operatörleri sırasıyla  $L$  ve  $L_0$  ile gösterelim.

$L_0$  operatörünün spektrumu  $\{4n^2\}_{n=0}^{\infty}$  kümesidir. Bu kümenin sıfır hariç her noktası katlılığı iki olan bir özdeğerdir. Sıfırın katlılığı ise birdir.

$L_0$  operatörünün özdeğerlerini  $\{\mu_k\}$  ile gösterirsek; o zaman

\* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: skizilb@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 15 32

$$\mu_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \mu_k = \begin{cases} (k+1)^2 & ; k \text{ tek ise} \\ k^2 & ; k \text{ çift ise} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise ,

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \quad \dots$$

dir.

L operatörünün özdeğerlerini  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  ile bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  ile gösterelim.

(1) diferansiyel ifadesi ve ayrılmış sınır koşulları altında oluşturulan operatörün düzenli iz formülü ilk olarak Gelfand -Levitan [1] tarafından bulunmuştur. Daha sonra aynı problem için düzenli iz formülü Dikiy [2] tarafından başka yöntemle elde edilmiştir. Düzenli iz formüllerine ait [3] –[18] çalışmaları gösterilebilir.

Bu çalışmada biz Dikiy nin metodunu kullanarak (1) diferansiyel ifadesi ve (2) periyodik sınır koşulları ile oluşturulan L operatörünün düzenli izi için, yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$$

serisi için bir formül elde edeceğiz.

## 2. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARA AİT BAZI SINIRLANDIRMALAR

Bu bölümde bize gerekecek olan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [(\varphi_n, L\varphi_n) - (\psi_n, L\psi_n)] = 0 \quad (3)$$

formülünü ispatlayalım. Bunun için [2] ye benzer olarak ortonormal  $\{\varphi_k\}$  bazından

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik} \varphi_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ortonormal bazına geçiş matrisi  $(u_{ik})_{i,k=0}^{\infty}$  yi inceleyelim. Burada  $u_{ik} = (\varphi_i, \psi_k)$  dir.  $(u_{ik})$  uniter matristir yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{ik}^2 = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

dir.

Önce  $u_{ik}$  lar için bazı değerlendirmeler verelim.

$$L\psi_k = \mu_k \psi_k + p\psi_k \quad (4)$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(L\psi_k, \varphi_i) = (\mu_k \psi_k, \varphi_i) + (p\psi_k, \varphi_i)$$

ya da

$$\lambda_i (\psi_k, \varphi_i) = \mu_k (\psi_k, \varphi_i) + (p\psi_k, \varphi_i)$$

**On the Trace Formula of Second Order Differential ...**

elde edilir. Böylece,

$$(\lambda_i - \mu_k)(\psi_k, \varphi_i) = (p\psi_k, \varphi_i)$$

olacaktır.

Bu son eşitliğin karesini alarak  $i$  ye göre  $0$  dan  $\infty$  a kadar toplam alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)^2 (\psi_k, \varphi_i)^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} (p\psi_k, \varphi_i)^2 = \|p\psi_k\|^2 = \int_0^{\pi} [p(x)\psi_k(x)]^2 dx \\ &\leq p_0^2 \int_0^{\pi} \psi_k^2(x) dx \\ &= p_0^2 \end{aligned} \quad (5)$$

olur. Burada  $p_0 = \max_{0 \leq x \leq \pi} |p(x)|$  dir.  $p(x)$  in aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

- 1)  $p(x)$  fonksiyonu,  $L$  operatörünün özdeğerlerinin asimtotik ifadesinin  $\lambda_k = \mu_k + O\left(\frac{1}{k}\right)$  şeklinde olmasını sağlar,
- 2)  $p(x)$  fonksiyonu,  $\int_0^{\pi} p(x) dx = 0$  eşitliğini sağlar.

Bu şartları aşağıdaki sınırlandırmalarda gözönüne alacağız. (5) e göre, her doğal  $N$  sayısı için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)^2 u_{ik}^2 < C \quad (C = \text{const.})^* \quad (k < N)$$

dir. Buradan

\*) Bu çalışmada  $C$  sabitleri farklı olabilir.

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k) u_{ik}^2 < C$$

olduğu çıkar. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 < C \\ \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k)^2 u_{ik}^2 < C \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_{N+1} - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \leq C$$

dir. Buradan  $k < N$  için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 \leq \frac{C}{\lambda_{N+1} - \mu_k} \quad (6)$$

elde edilir.

Şimdi (3) ü ispatlayalım.

$$(\psi_k, L\psi_k) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} u_{ik} \varphi_i, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik} \varphi_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 .$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^N (\psi_k, L\psi_k) = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2$$

olur.

(3) deki birinci toplamı hesaplayalım.  $\sum_{i=0}^{\infty} u_{ki}^2 = 1$  olduğunu gözönüne alırsa

$$\sum_{k=0}^N (\varphi_k, L\varphi_k) = \sum_{k=0}^N \lambda_k = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 - \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2 \right) = 0 \tag{7}$$

olduğunu ispatlamamız gerekir.

$$\sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i u_{ik}^2 - \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2 = \sum_{k=0}^N \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 + \sum_{k=0}^N \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_k (u_{ik}^2 - u_{ki}^2) \tag{8}$$

olduğu açıktır.

(8) in sağ tarafındaki birinci toplamı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_N) u_{iN}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 + (\lambda_{N+1} - \lambda_N) u_{(N+1)N}^2 + \sum_{i=N+2}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_N) u_{iN}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

(N + 1) çift sayı olmak üzere (6) dan yararlanarak  $\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2$  terimini

sınırlandıralım:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 &< \sum_{k=0}^{N-1} \frac{C}{(N+1)^2 - (k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{C}{(N+1)^2 - k^2} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)^2 - N^2} + \int_1^N \frac{dx}{(N+1)^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{N+1} \int_1^{\frac{N}{N+1}} \frac{du}{1-u^2} \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\ln N}{N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) . \end{aligned} \tag{10}$$

Yine (N + 1) çift sayı olmak üzere (6) dan yararlanarak  $\sum_{i=N+2}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_N) u_{iN}^2$  için

***On the Trace Formula of Second Order Differential ...***

$$\sum_{i=N+2}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_N) u_{iN}^2 < \frac{C}{(N+3)^2 - (N+1)^2} = \frac{C}{5N+8} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (11)$$

bulunur. Son olarak ta yine  $(N+1)$  çift sayı olmak üzere  $(\lambda_{N+1} - \lambda_N) u_{N+1N}^2$  terimini sınırlandırırız;

$$(\lambda_{N+1} - \lambda_N) u_{N+1N}^2 \leq \lambda_{N+1} - \lambda_N = (N+1)^2 - (N+1)^2 + O\left(\frac{1}{N+1}\right) - O\left(\frac{1}{N}\right) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (12)$$

olacaktır. Böylece  $(N+1)$  in çift sayı olması durumunda (9), (10), (11) ve (12) den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \lambda_k) u_{ik}^2 = 0 \quad (13)$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $(N+1)$  in tek sayı olması durumunda da (13) ispatlanabilir.

Şimdi ise  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_k u_{ki}^2 = 0$  olduğunu ispatlayalım.

$$u_{ik} + u_{ki} = (\varphi_i, \psi_k) + (\varphi_k, \psi_i) = -(\varphi_i - \psi_i, \varphi_k - \psi_k)$$

olduğu açıktır.  $L$  operatörünün özfonksiyonlarının asimtotik ifadesini gözönüne alırsak, buradan

$$|u_{ik} + u_{ki}| \leq \|\varphi_i - \psi_i\| \|\varphi_k - \psi_k\| \leq \frac{C}{ik} \quad (14)$$

elde ederiz.

$(N+1)$  çift sayı ve  $k < N$  olmak üzere (6) dan ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak aşağıdaki sınırlandırmalar yapılabilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k) |u_{ik}^2 - u_{ki}^2| &= \sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k) |u_{ik} - u_{ki}| |u_{ik} + u_{ki}| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{ik} + u_{ki}|^2} \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} (\lambda_i - \mu_k)^2 |u_{ik} - u_{ki}|^2} \\ &< \frac{C}{k\sqrt{N+1}} \end{aligned}$$

Böylece buradan  $k < N$  için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{ik}^2 - u_{ki}^2| < \frac{C}{k\sqrt{N+1}(\lambda_{N+1} - \mu_k)} < \frac{C}{k\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - (k+1)^2]} \quad (15)$$

elde edilir. (8) eşitliğinin ikinci toplamının terimlerinin mutlak değerinden oluşan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{ik}^2 - u_{ki}^2| &= \lambda_N \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{iN}^2 - u_{Ni}^2| + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{ik}^2 - u_{ki}^2| \\ &= \lambda_N |u_{N+1N}^2 - u_{NN+1}^2| + \lambda_N \sum_{i=N+2}^{\infty} |u_{iN}^2 - u_{Ni}^2| + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_{ik}^2 - u_{ki}^2| \end{aligned} \quad (16)$$

ifadesini sınırlandırılalım.  $(N+1)$  çift sayı olmak üzere (14) eşitsizliğine göre (16) nın sağ tarafındaki birinci toplam için

$$\begin{aligned} \lambda_N \left| u_{N+1N}^2 - u_{NN+1}^2 \right| &= \lambda_N \left| u_{N+1N} - u_{NN+1} \right| \left| u_{N+1N} + u_{NN+1} \right| \\ &\leq C(N+1)^2 \frac{1}{(N+1)N} \left| u_{N+1N} + u_{NN+1} \right| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir.

Yine  $(N+1)$  çift sayı olmak üzere, (15) den yararlanarak (16) nın ikinci toplam için

$$\begin{aligned} \lambda_N \sum_{i=N+2}^{\infty} \left| u_{iN}^2 - u_{Ni}^2 \right| &< C \frac{(N+1)^2}{N\sqrt{N+2}(\lambda_{N+2} - \mu_N)} \\ &< \frac{C(N+1)^2}{N\sqrt{N+2}[(N+3)^2 - (N+1)^2]} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (18)$$

bulunur.

Şimdi de yine (15) den yararlanarak (16) nın üçüncü toplamını değerlendirirsek;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} \left| u_{ik}^2 - u_{ki}^2 \right| &< C \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)^2}{k\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - (k+1)^2]} \\ &= C \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{(k-1)\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - k^2]} \\ &< C \sum_{k=1}^N \frac{k}{\sqrt{N+1}[(N+1)^2 - k^2]} \\ &< C \frac{N+1}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(N+1)^2 - k^2} \sim C \frac{\ln N}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (19)$$

olur. Böylece  $(N+1)$  çift sayı olmak üzere (16), (17), (18) ve (19) dan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_k \left( u_{ik}^2 - u_{ki}^2 \right) = 0 \quad (20)$$

elde edilir. Benzer şekilde  $(N+1)$  in tek sayı olması durumunda da bu eşitlik ispatlanabilir. (8), (13) ve (20) den (7) nin ve buradan da (3) ün ispatı elde edilir.

### 3. DÜZENLİ İZİN HESAPLANMASI

$(\varphi_n, L\varphi_n) = \lambda_n$  olduğu aşıkardır. O halde

$$(\psi_n, L\psi_n) = \mu_n + (\psi_n, p\psi_n)$$

dir. Buradan (3) ifadesini gözönüne alırsak;

$$\sum_{n=0}^N [(\psi_n, L\psi_n) - (\varphi_n, L\varphi_n)] = \sum_{n=0}^N (\mu_n - \lambda_n) + \sum_{n=0}^N (\psi_n, p\psi_n) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (21)$$

olur.

Şimdi  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (\psi_n, p\psi_n)$  nin değerini hesaplayalım.  $N$  çift sayı olmak üzere  $p(x)$

için ikinci şartı gözönüne alırsak;

**On the Trace Formula of Second Order Differential ...**

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (\psi_n, p\psi_n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \sum_{n=1}^N \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \sin^2 2nx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \cos^2 2nx dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{N}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, N in tek sayı olması durumunda;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (\psi_n, p\psi_n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \sin^2 2nx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \cos^2 2nx dx \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \sin^2 Nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{(N-1)}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \left( \frac{1 - \cos 2Nx}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \cos 2Nx dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (23)$$

elde edilir. Bulduğumuz (22) ve (23) ifadelerinden

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (\psi_n, p\psi_n) = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak buradan ve (21) den

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (\lambda_n - \mu_n) = 0$$

olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem:** Eğer  $p(x)$  fonksiyonu 1) - 2) şartlarını sağlıyor ise o zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = 0$$

dır.

**KAYNAKLAR**

- [1] Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M. , “İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için bir formül hakkında” Dokl. AN SSSR, 1953, T. 88, No:4, 593-596.
- [2] Dikiy, L. A., “Gelfand-Levitan ın bir formülü hakkında”, Uspeki Matem. Nauk, 1953, T. 8, No:2, 119-123.
- [3] Gelfand, I. M., “İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için formüller”, Uspeki Matem. Nauk, 1956, T. 11, 191-198.

- [4] Dikiy, L. A., “Sturm-Liouville diferansiyel operatörleri için iz formülleri”, *Uspeki Matem. Nauk*, 1958, T. 13, No:3, 111-143.
- [5] Halberg, C. J. and Kramer, V. A. , “Generalization of the trace concept”, *Duke Mathematical Journal*, 1960, V. 27, No:4, 607-618.
- [6] Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M. , “İki singular Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin farklarının toplamı hakkında”, *Dokl. AN SSSR*, 1963, T.151, No. 5, 1014-1017.
- [7] Sadovniçiy, V. A., “ Yüksek mertebeden iki diferansiyel operatörünün farkının izi hakkında”, *Differens. Uravneniya*, 1966, T. 2, No: 12, 1611-1624.
- [8] Adıgüzelov, E.E. “Operatör katsayılı iki Sturm-Liouville operatörünün farkının izi hakkında”, *İzv. AN SSSR, Seriya Fiz-Tekn. I Mat. Nauk*, No: 5, 1976, 20-24.
- [9] Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “On a regularized trace of the Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient”, *Dokl. AN SSSR, English translation Soviet Math., Dokl.* 30(1984), No: 1, 169-173.
- [10] Bayramoğlu, M., “Sınırsız operatör katsayılı diferansiyel denklemin düzenli izi üzerine”, *Spectral Theory and Its Applications*, No: 7, Baku, 1987, 15-40.
- [11] Gaşimov, İ.F., “Singüler diferansiyel operatör denklemlerin spektrumunun ve düzenli izinin incelenmesi”, *Doktora Tezi, Bakü*, 1990, 123 s.
- [12] Dostanic, M. “Trace formula of Gelfand-Levitan type”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.)*, 1994, V. 55, 51-65.
- [13] Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “On a regularized trace formula for the Sturm-Liouville operator with a bounded operator coefficient and with a singularity”, *Differential Equations*, 32 (1996), No: 12, 1581-1585, (1997).
- [14] Albayrak, İ., Bayramoğlu, M. and Adıgüzelov, E.E., “Formula for the second regularized trace of the Sturm-Liouville problem with a spectral parameter on boundary condition”, *Methods of Functional analysis and topology*, Volume 4, No: 3, 1-8, 1999.
- [15] Albayrak, İ., Baykal, O. and Gül, E. , “Formula for the highly regularized trace of the Sturm-Liouville operator with unbounded operator coefficients having singularity”, *Turkish Journal of Math.*, V. 25, No: 2, 307-322, 2001.
- [16] Adıgüzelov, E. E., Baykal, O. and Bayramov, A., “On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter on the boundary condition and with the operator coefficient”, *International Journal of Differential Equations and Applications*, Volume 2, No: 3, 2001, 317-333.
- [17] Bayramoğlu, M. and Şahintürk, H., “Sınır koşulunda spektral parametre olan Sturm-Liouville probleminin düzenli izi üzerine”, *SIAM 50 th Anniversary and 2002 Annual Meeting*, (8-12 Temmuz, 2002), Philadelphia, ABD, 2002.
- [18] Albayrak, İ., Akgün, F., “Sonlu aralıkta çift mertebeden bir diferansiyel denklemin düzenli izinin hesaplanması”, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 4/2004, 272-278.