

AN ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE SUM OF THE NEGATIVE EIGENVALUES OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR GIVEN IN INFINITE INTERVAL

Özlem BAKŞI^{*1}, Sedi İSMAYİLOV²

¹Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

²Azərbaycan Teknik Universiteti, Atomatika və Hesaplama Teknikasi Fakültesi, Matematik Bölümü, AZERBAJCAN

Geliş/Received: 08.03.2005 Kabul/Accepted: 05.10.2005

ABSTRACT

Asymptotic formul is founded for the sum of negative eigenvalues of the operator L in $L_2[0, \infty)$ space, where L formed by $I(y) = (p(x)y'(x))' - q(x)y(x)$ differential expression and $y(0) = 0$ bounded condition,

Keywords: Self-adjoint operator, Negative eigen value, Spectrum, Asymptotic
MSC number/numarası: 34B24.

SONSUZ ARALIKTA VERİLMİŞ İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN NEGATİF ÖZDEĞERLERİNİN TOPLAMI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

ÖZET

$L_2[0, \infty)$ uzayında $I(y) = (p(x)y'(x))' - q(x)y(x)$ diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan L operatörünün negatif özdeğerlerinin toplamı için asimptotik formül bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kendine eş operatör, Negatif özdeğer, Spectrum, Asimtotik.

1. GİRİŞ

$p(x)$ ve $q(x)$ $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan herhangi iki fonksiyon olsun.

- 1) $c_1 \leq p(x) \leq c_2$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ sabitleri vardır.
- 2) $p(x)$ fonksiyonu monoton azalmayandır ve sürekli türe sahiptir.
- 3) $q(x)$ fonksiyonu sürekli, pozitif değerli ve monoton azalandır.
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$

$D(L)$ ile

- a) $y(x)$ ve $y'(x)$ fonksiyonları her sonlu $[0, a]$ ($a \in (0, \infty)$) aralığında mutlak süreklidir.

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: baksi@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 15 28

b) $y(0) = 0$

c) $(p(x)y'(x))' \in L_2(0, \infty)$ koşullarını sağlayan tüm $y \in L_2(0, \infty)$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim.

$$L : D(L) \rightarrow L_2(0, \infty)$$

$$(Ly)(x) = -(p(x)y'(x))' - q(x)y(x)$$

kendine eş operatörünü göz önüne alalım. L ye $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$l(y) = -(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) \quad (1)$$

Diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan operatör diyeceğiz. L operatörünün alttan yarı-sınırlı ve spektrumunun negatif kısmının ayırık olduğu bilinmektedir [1]. $-\lambda_1 \leq -\lambda_2 \leq \dots \leq -\lambda_n \leq \dots$ L operatörünün negatif öz değerleri olsun. Bu çalışma da $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j \quad (\varepsilon > 0)$$

toplamı için asimtotik formül bulunmuştur. [2] çalışmasında L operatörünün negatif öz değerlerinin sayısı için asimtotik formüller bulunmuştur. [3] çalışmasında operatör katsayılı bir diferansiyel operatörün negatif öz değerlerinin sayısının asimtotik ifadeleri bulunmuştur. [4] çalışmasında $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$l_1(y) = -y''(x) - q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve $y'(0) = 0$ sınır koşuluyla oluşturulan operatörün negatif öz değerlerinin toplamının asimtotik davranışı incelenmiştir.

2. ÖZDEĞERLER İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

$q(x)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan tersi vardır. $q(x)$ in ters fonksiyonu $g(x)$ olsun. Ayrıca, $\varepsilon, g(x)$ fonksiyonunun tanım kümesine ait olan $\varepsilon < q(0)$ koşulunu sağlayan bir sayı olsun.

Aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım:

1) $L_2[0, g(\varepsilon)]$ uzayında (1) ifadesi ve sırasıyla $y(0) = y(g(\varepsilon)) = 0$, $y'(0) = y'(g(\varepsilon)) = 0$

sınır koşullarıyla oluşturulan L' ve L'' operatörleri

2) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında (1) ifadesi ve sırasıyla

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0 ,$$

$$y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$$

sınır koşullarıyla oluşturulan L'_i ve L''_i operatörleri

3) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında $-p(x_i)y''(x) - q(x_i)y(x)$

İfadesi ve $y(x_{i-1}) = y(x_i) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(1)}$ operatörü

4) $L_2[x_{i-1}, x_i]$ uzayında $-p(x_{-i})y''(x) - q(x_{i-1})y(x)$

İfadesi ve $y'(x_{i-1}) = y'(x_i) = 0$ sınır koşullarıyla oluşturulan $L_i^{(2)}$ operatörü

$[0, g(\varepsilon)]$ aralığını uzunlukları

An Asymptotic Formula for the Sum of the Negative ...

$$\delta = \frac{g(\varepsilon)}{\left[\left[g^\alpha(\varepsilon) \right] + 1 \right]} \quad (2)$$

olan parçalara bölelim. Burada $\varepsilon, g^\alpha(\varepsilon) \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir pozitif sayı ve $\alpha \in (0,1)$ dir. $\left[\left[g^\alpha(\varepsilon) \right] \right]$ ile $g^\alpha(\varepsilon)$ sayısının tam kısmı gösterilmiştir. $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = g(\varepsilon)$, $[0, g(\varepsilon)]$ aralığının bölüntü noktaları olsun.

L, L', L'', L_i' ve $L_i^{(1)}$ operatörlerinin $-\lambda$ dan ($\lambda > 0$) küçük özdeğerlerinin sayısı sırasıyla $N(\lambda), N'(\lambda), N''(\lambda), n_i'(\lambda)$ ve $n_i^{(1)}(\lambda)$ olsun. Ayrıca

$$n_i'(\varepsilon) = n_i \quad \text{ve} \quad n_i^{(1)}(\varepsilon) = n_i^{(1)} \quad \text{olsun. [2] çalışmasında} \\ N'(\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq N''(\varepsilon) \quad (3)$$

ve $L_i' < L_i^{(1)}$, $L_i'' > L_i^{(2)}$ eşitsizlikleri ispatlanmıştır. (3) nin ispatına benzer şekilde

$$N'(\lambda) \leq N(\lambda) \leq N''(\lambda) \quad (\lambda \geq \varepsilon) \quad (4)$$

eşitsizlikleri ispatlanabilir. $L_i' < L_i^{(1)}$ eşitsizliğinden

$$n_i'(\lambda) \geq n_i^{(1)}(\lambda) \quad (5)$$

elde edilir. [5] R.Courant' in varyasyon prensiplerinden dolayı

$$N'(\lambda) \geq \sum_{i=1}^M n_i^{(1)}(\lambda) \quad (6)$$

dir [6]. (4), (5) ve (6) ten

$$N(\lambda) \geq \sum_{i=1}^M n_i^{(1)}(\lambda) \quad (7)$$

bulunur. $L_i^{(1)}$ operatörünün özdeğerleri $-\mu_{i1} < -\mu_{i2} < -\mu_{i3} < \dots$ olsun.

Teorem 1: $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları 1), 2), 3) ve 4) koşullarını sağlıyorsa ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx - c_3 g^\alpha(\varepsilon)$$

dir. Burada $f(x, \varepsilon) = (3\pi)^{-1} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}}$ ve $c_3 > 0$ bir sabittir.

İspat: $L_i^{(1)}$ operatörünün özdeğerleri

$$-\mu_{im} = p(x_i) \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_i) \quad \text{şeklindedir. Buradan}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} &= \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \left[q(x_i) - p(x_i) \left(\frac{m\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 \right] \\ &= q(x_i)n_i^{(1)} - p(x_i)\pi^2 \delta^{-2} \frac{n_i^{(1)}(n_i^{(1)}+1)(2n_i^{(1)}+1)}{6} \\ &= q(x_i)n_i^{(1)} - \frac{p(x_i)\pi^2}{6\delta^2} [2(n_i^{(1)})^3 + 3(n_i^{(1)})^2 + n_i^{(1)}] \end{aligned} \quad (8)$$

elde edilir.

$p(x_i) \left(\frac{m\pi}{\delta} \right)^2 - q(x_i) < -\varepsilon$ eşitsizliğinden $n_i^{(1)}$ için

$$\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} - 1 \leq n_i^{(1)} < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \quad (9)$$

bulunur. (8) ve (9) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} &\geq q(x_i) \left(\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} - 1 \right) - \frac{p(x_i)\pi^2}{6\delta^2} \\ &\quad \left[\frac{2\delta^3}{\pi^3} \left(\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)} \right)^{3/2} + \frac{3\delta^2}{\pi^2} \frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)} + \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \right] \\ &= q(x_i)\delta\pi^{-1} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} - q(x_i) \frac{p(x_i)\delta}{3\pi} \left(\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)} \right)^{3/2} - \frac{q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta} \sqrt{p(x_i)(q(x_i) - \varepsilon)} \\ &= \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \left[q(x_i) - \frac{p(x_i)}{3} \frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)} \right] - \frac{3q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta} \sqrt{p(x_i)(q(x_i) - \varepsilon)} \\ &= \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} \left[\frac{2}{3}q(x_i) + \frac{\varepsilon}{3} \right] - \frac{3q(x_i)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\pi}{6\delta} \sqrt{p(x_i)(q(x_i) - \varepsilon)} \\ &> \frac{\delta}{3\pi} \sqrt{\frac{q(x_i) - \varepsilon}{p(x_i)}} [2q(x_i) + \varepsilon] - 2q(x_i) - \delta^{-1} \sqrt{p(x_i)q(x_i)} \end{aligned} \quad (10)$$

bulunur.

$f(x, \varepsilon) = (3\pi)^{-1} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}}$ alınırsa (10) dan

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \geq \delta f(x_i, \varepsilon) - 2q(x_i) - \delta^{-1} \sqrt{p(x_i)q(x_i)} \quad (11)$$

elde edilir. $q(x)$ monoton azalan ve $p(x)$ monoton azalmayan fonksiyonlar olduğundan her sabit $\varepsilon \in (0, q(0))$ için $f(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $[0, g(\varepsilon)]$ aralığında monoton azalandır. Dolayısıyla

An Asymptotic Formula for the Sum of the Negative ...

$$\delta f(x_i, \varepsilon) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, \varepsilon) dx > \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \varepsilon) dx \quad (12)$$

dir. (11) ve (12) den

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \geq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \varepsilon) dx - 2q(0) - \delta^{-1} \sqrt{c_2 q(0)} \quad (13)$$

bulunur. (7) dan yararlanarak

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \geq \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \quad (14)$$

olduğu gösterilebilir. (13) ve (14) den

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j &> \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{n_i^{(1)}} \mu_{im} \geq \sum_{i=1}^{M-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, \varepsilon) dx - 2q(0) - \delta^{-1} \sqrt{c_2 q(0)} \right] \\ &> \int_{x_1}^{x_M} f(x, \varepsilon) dx - 2q(0)M - \delta^{-1} M \sqrt{c_2 q(0)} \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. Öte yandan (2) den

$$\delta > \frac{g(\varepsilon)}{2g^\alpha(\varepsilon)} = \frac{1}{2} g^{1-\alpha}(\varepsilon) > \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{g(\varepsilon)}{\delta} = \left[g^\alpha(\varepsilon) \right] + 1 < 2g^\alpha(\varepsilon) \quad (16)$$

bulunur. (15) den ve bu son iki bağıntıdan

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx - c_3 g^\alpha(\varepsilon) \quad \text{elde edilir. } \square$$

L_i'' ve $L_i^{(2)}$ operatörlerinin öz değerleri sırasıyla $-\gamma_{i1}'' < -\gamma_{i2}'' < \dots$ ve $-\gamma_{i1}^{(2)} < -\gamma_{i2}^{(2)} < \dots$ olsun. Ayrıca L_i'' ve $L_i^{(2)}$ operatörlerinin $-\lambda$ dan ($\lambda > 0$) küçük olan öz değerlerinin sayısı sırasıyla $n_i''(\lambda)$ ve $n_i^{(2)}(\lambda)$ olsun. $L_i'' > L_i^{(2)}$ olduğundan

$$n_i''(\lambda) \leq n_i^{(2)}(\lambda) \quad (17)$$

dir [5]. R. Courant'ın varsayım prensipleri gereğince

$$N''(\lambda) \leq \sum_{i=1}^M n_i''(\lambda) \quad (18)$$

dir [6]. (4), (17) ve (18) den $N(\lambda) \leq \sum_{i=2}^M n_i^{(2)}(\lambda) + n_1''(\lambda)$ elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \leq \sum_{i=2}^M \sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im} + \sum_{m=1}^{n_1''} \gamma_{1m}'' \tag{19}$$

eşitsizliği ispatlanabilir. Burada $n_i^{(2)} = n_i^{(2)}(\varepsilon)$, $n_1'' = n_1''(\varepsilon)$ alınmıştır.

Teorem 2 : 1), 2), 3) ve 4) koşulları sağlanıyorsa $\varepsilon > 0$ in küçük değerleri için

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j < \frac{1}{3\pi} \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + c_6 \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx + c_6 g^\alpha(\varepsilon) \text{ dir. Burada } c_6 > 0 \text{ bir sabittir.}$$

İspat: $L_i^{(2)}$ operatörünün özdeğerleri

$$-\gamma_{im}^{(2)} = p(x_{i-1}) \left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_{i-1}) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} &= \sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \left[q(x_{i-1}) - p(x_{i-1}) \left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 \right] \\ &= n_i^{(2)} q(x_{i-1}) - p(x_{i-1}) \pi^2 \delta^{-2} \frac{(n_i^{(2)} - 1)n_i^{(2)}(2n_i^{(2)} - 1)}{6} \\ &= n_i^{(2)} q(x_{i-1}) - \frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2} \left[2(n_i^{(2)})^3 - 3(n_i^{(2)})^2 + n_i^{(2)} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

dir.

$$p(x_{i-1}) \left(\frac{(m-1)\pi}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 - q(x_{i-1}) < -\varepsilon \text{ ifadesinden}$$

$$\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} \leq n_i^{(2)} < \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1}) - \varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \tag{21}$$

elde edilir. (20) ve (21) den yararlanılarak;

An Asymptotic Formula for the Sum of the Negative ...

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} &< q(x_{i-1}) \left[\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \right] - \frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2} \left[\frac{2\delta^3}{\pi^3} \left(\sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} \right)^3 + \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} \right] \\
 &\quad + \frac{p(x_{i-1})\pi^2}{6\delta^2} \left[\frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \right]^2 \\
 &= \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} \left[q(x_{i-1}) - \frac{1}{3}(q(x_{i-1})-\varepsilon) \right] + q(x_{i-1}) \\
 &\quad - \frac{\pi}{6\delta} \sqrt{p(x_{i-1})(q(x_{i-1})-\varepsilon)} + \frac{\pi^2 p(x_{i-1})}{2\delta^2} \left[\frac{\delta^2}{\pi^2} \frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})} + \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} + 1 \right] \\
 &= \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} \left[\frac{2}{3}q(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{3} \right] + q(x_{i-1}) \\
 &\quad + \frac{5\pi}{6\delta} \sqrt{p(x_{i-1})(q(x_{i-1})-\varepsilon)} + \frac{1}{2} [q(x_{i-1})-\varepsilon] + \frac{\pi^2 p(x_{i-1})}{2\delta^2} \\
 &< \frac{\delta}{\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} \left[\frac{2}{3}q(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{3} \right] + q(0) + \frac{\pi}{\delta} \sqrt{c_2 q(0)} + q(0) + \frac{c_2 \pi^2}{\delta^2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta > \frac{1}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} < \frac{\delta}{3\pi} \sqrt{\frac{q(x_{i-1})-\varepsilon}{p(x_{i-1})}} [2q(x_{i-1}) + \varepsilon] + c_4 \quad \text{veya}$$

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} < \delta f(x_{i-1}, \varepsilon) + c_4 \tag{22}$$

elde edilir. Burada $c_4 > 0$ bir sabittir. Her sabit $\varepsilon \in (0, q(0))$ için $f(x, \varepsilon)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan

$$\delta f(x_{i-1}, \varepsilon) = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x_{i-1}, \varepsilon) dx < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x, \varepsilon) dx \tag{23}$$

dir. (22) ve (23) dan

$$\sum_{m=1}^{n_i^{(2)}} \gamma_{im}^{(2)} < \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x_{i-1}, \varepsilon) dx + c_4 \quad (i = 2, 3, \dots, m) \tag{24}$$

bulunur. (16), (19) ve (24) den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j \leq \sum_{i=2}^M \left[\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x, \varepsilon) dx + c_4 \right] + \sum_{m=1}^{n_1} \gamma_{1m}'' < \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + c_4 M + \sum_{m=1}^{n_1} \gamma_{1m}'' < \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + 2c_4 g^\alpha(\varepsilon) + \sum_{m=1}^{n_1} \gamma_{1m}'' \quad (25)$$

elde edilir. $\sum_{m=1}^{n_1} \gamma_{1m}''$ toplamı için

$$\sum_{m=1}^{n_1} \gamma_{1m}'' < c_5 \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx + c_5 g^\alpha(\varepsilon) \quad (26)$$

eşitsizliği ispatlanabilir. (25) ve (26) den

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_j < \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx + c_6 \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx + c_6 g^\alpha(\varepsilon) \text{ bulunur. } \square$$

3. NEGATİF ÖZDEĞERLERİN TOPLAMI İÇİN ASİMTOTİK FORMÜL

Bu kısımda Teorem 1 ve Teorem 2 den yararlanarak $\varepsilon \rightarrow +0$ iken $\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j$ toplamı için

asimtotik formül bulunacaktır. $q(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulu sağladığını varsayalım:

d) Her $\eta \in (0, \infty)$ sayısı için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)x^{k-\eta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \{q(x)x^{k+\eta}\}^{-1} = 0$$

dır. Burada $k, \left(0, \frac{2}{3}\right)$ aralığına ait olan sabit bir sayıdır.

Teorem 3: $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının 1),2) ve 3) koşullarını sağladığını varsayalım. Ek olarak $q(x)$ fonksiyonu d) koşulunu sağlasın. Bu durumda $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j = (3\pi)^{-1} [1 + o(\varepsilon^{t_0})] \int_{q(x) \geq \varepsilon} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü sağlar. Burada $t_0 \in (0, \infty)$ bir sabittir.

İspat: Teorem 1 gereğince ε nun küçük pozitif değerleri için

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j > \int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx - \int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx - c g^\alpha(\varepsilon) \quad (27)$$

dır. Teoremi ispatlamak için bu eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı sınırlandıralım $q(x)$ fonksiyonu monoton azalan olduğundan $[0, g(2\varepsilon)]$ aralığında $q(x) \geq q(g(2\varepsilon)) = 2\varepsilon$ dir. Bu nedenle

An Asymptotic Formula for the Sum of the Negative ...

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \frac{1}{3\pi} \int_0^{g(2\varepsilon)} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > \pi^{-1} \varepsilon \int_0^{g(2\varepsilon)} \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx > \varepsilon^{3/2} \int_0^{g(2\varepsilon)} \sqrt{\frac{1}{p(x)}} dx$$

dır. $p(x) < c_2$ olduğundan buradan

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \sqrt{c_2^{-1}} \varepsilon^{3/2} g(2\varepsilon) \quad (28)$$

elde edilir. $q(x)$ fonksiyonu d) koşulunu sağladığından

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0 \quad (29)$$

ve her $\eta > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x)x^{k+\eta} = \infty \quad (30)$$

dır. (29) den

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) = \infty \quad (31)$$

bulunur. (30) ve (31) den $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(g(2\varepsilon))[g(2\varepsilon)]^{k+\eta} = \infty$ elde edilir. Buradan ε nun η ya bağlı olan

küçük değerleri için

$$2\varepsilon[g(2\varepsilon)]^{k+\eta} > 2 \text{ ya da}$$

$$g(2\varepsilon) > \varepsilon^{-\frac{1}{k+\eta}} \quad (32)$$

bulunur. (28) ve (32) den

$$\int_0^{g(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx > \sqrt{c_2^{-1}} \varepsilon^{\frac{3}{2} - \frac{1}{k+\eta}} \quad (33)$$

elde edilir. (27) eşitsizliğinin ikinci tarafındaki $\int_0^{\delta} f(x, \varepsilon) dx$ integralini sınırlandıralım. $q(x)$

fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında d) koşulunu sağladığından

$$q(x) \leq f_1(\eta)x^{\eta-k} \quad (0 < \eta < k) \quad (34)$$

olacak şekilde pozitif değerli bir $f_1(\eta)$ fonksiyonu vardır. Öte yandan $p(x) \geq c_1$ ($c_1 > 0$) olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} f(x, \varepsilon) dx &= \frac{1}{3\pi} \int_0^{\delta} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx \\ &< \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}} dx < \int_0^1 \frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}} dx + \int_1^{\delta} \frac{q^{3/2}(x)}{\sqrt{p(x)}} dx \end{aligned}$$

$$< c_7 + f_2(\eta) \int_1^\delta x^{\frac{3(\eta-k)}{2}} dx < c_7 + f_2(\eta) \delta^{\frac{3(\eta-k)}{2}+1} \tag{35}$$

dır. (2) eşitliğinden ε nun küçük değerleri için

$$\delta < [g(\varepsilon)]^{1-\alpha} \tag{36}$$

bulunur. (34) da x yerine $g(\varepsilon)$ yazılırsa

$$q(g(\varepsilon)) \leq f_1(\eta) [g(\varepsilon)]^{\eta-k} \text{ ya da}$$

$$g(\varepsilon) \leq [f_1(\eta)]^{\frac{1}{k-\eta}} \varepsilon^{-\frac{1}{k-\eta}} \tag{37}$$

elde edilir. (35), (36) ve (37) den

$$\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx < f_3(\eta) \varepsilon^{\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)}} \tag{38}$$

bulunur. Burada $f_3(\eta)$ ($0 < \eta < k$), η ya bağlı ve değerleri $(0, \infty)$ aralığına ait olan bir fonksiyondur. (37) den

$$g^\varepsilon(\varepsilon) \leq [f_1(\eta)]^{\frac{\alpha}{k-\eta}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{k-\eta}} \tag{39}$$

elde edilir. (33), (38) ve (39) den

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{g(\varepsilon)} < f_4(\eta) \varepsilon^{-\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta}} \tag{40}$$

$$\frac{g^\alpha(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} < f_4(\eta) \varepsilon^{-\frac{\alpha}{k-\eta} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta}} \tag{41}$$

bulunur. $k \neq 0$ olduğundan

$$-\frac{(1-\alpha)(3(\eta-k)+2)}{2(k-\eta)} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} \text{ ve } -\frac{\alpha}{k-\eta} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} \text{ fonksiyonları } \eta \text{ ya göre}$$

$\eta = 0$ noktasında süreklidirler. Dolayısıyla her $t > 0$ için öyle bir $\eta = \eta(t) > 0$ vardır ki

$$-\frac{(1-\alpha)(3(\eta-k)+2)}{2(k-\eta)} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} > \frac{\alpha(2-3k)}{2k} - t \tag{42}$$

ve

$$-\frac{\alpha}{k-\eta} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} > \frac{2-3k-2\alpha}{2k} - t \tag{43}$$

An Asymptotic Formula for the Sum of the Negative ...

dır. Buraya kadar yapılan işlemlerde α , $(0,1)$ aralığına ait olan bir sabit sayıdır. Burada

$$\alpha = \frac{2-3k}{4}, \quad t = t_0 = \min\left\{\frac{(2-3k)^2}{16k}, \frac{2-3k}{8k}\right\} \quad \text{alınırsa (42) ve (43) dan}$$

$$\begin{aligned} -\frac{(1-\alpha)[3(\eta-k)+2]}{2(k-\eta)} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} &> \frac{(2-3k)^2}{8k} - t \\ &\geq \frac{(2-3k)^2}{8k} - \frac{(2-3k)^2}{16k} = \frac{(2-3k)^2}{16k} \geq t_0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$-\frac{\alpha}{k-\eta} - \frac{3}{2} + \frac{1}{k+\eta} > \frac{2-3}{4k} - t_0 \geq \frac{2-3}{4k} - \frac{2-3}{8k} = \frac{2-3}{8k} \geq t_0 \quad (45)$$

elde edilir. (40), (41), (44) ve (45) den

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{g(\varepsilon)} < c_8 \varepsilon^{t_0} \quad (46)$$

$$\frac{\int_0^\delta f(x, \varepsilon) dx}{g^\alpha(\varepsilon)} < c_8 \varepsilon^{t_0} \quad (47)$$

bulunur. Burada $c_8 = f_4(\eta(t_0)) \in (0, \infty)$ bir sabittir. (27), (46) ve (47) eşitsizliklerinden

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j}{g(\varepsilon)} > 1 - c_9 \varepsilon^{t_0} \quad (c_9 \in (0, \infty)) \quad (48)$$

elde edilir. Teorem 2 den ve (46), (47) eşitsizliklerinden

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j}{g(\varepsilon)} < 1 + c_{10} \varepsilon^{t_0} \quad (49)$$

bulunur. (48) ve (49) dan $\varepsilon \rightarrow +0$ iken

$$\frac{\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j}{g(\varepsilon)} - 1 = o(\varepsilon^{t_0}) \quad \text{ya da}$$

$$\int_0^{\infty} f(x, \varepsilon) dx$$

$$\sum_{-\lambda_j < -\varepsilon} \lambda_j = (3\pi)^{-1} \left[1 + o(\varepsilon^{t_0}) \right] \int_{q(x) \geq \varepsilon} [2q(x) + \varepsilon] \sqrt{\frac{q(x) - \varepsilon}{p(x)}} dx$$

asimtotik formülü elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Naimark M.A “Linear differential operators”, part I,II, London, 1968.
- [2] Skaçek B.Y. “Bir boyutlu diferansiyel operatörlerin spektrumunun negatif kısmının asimptodu”, Pribl. Metod reseniya differens, unavneniy, Kiev, 1963.
- [3] Maksudov F.G., Bayramoğlu M., Adıgüzelov E.,”On asymptotics of spectrum and trace of high order differantial operator with operator coefficients”, Doğa-Turkish journal of Mathematics, vol.17, n.2, 1993.
- [4] Ehliman Adıgüzelov, Zerrin Oer, “Yarı eksende verilmiş Sturm-Lioville operatörünün negatif özdeğerlerinin toplamının asimtotik ifadesi”, YTÜD, Vol 1,26-35, 2000.
- [5] Smirnov, V.I., A course of Higher Mathematics, vol.5, 602, New York Pergamon Press 1964.
- [6] Courant R. And Hilbert D. “Methods of Mathemetical Physics” vol.1, 441, New York, 1970.