

Araştırma Makalesi / Research Article

ON THE NORMAL STRESSES IN THE ELASTIC BODY WITH A LOCALLY CURVED FIBRE UNDER GEOMETRIC NONLINEAR STATEMENT

Reşat KÖŞKER^{*1}, Kadriye ŞİMŞEK²

¹*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Esenler-İSTANBUL*

²*Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Esenler-İSTANBUL*

Geliş/Received: 02.06.2006 Kabul/Accepted: 16.08.2006

ABSTRACT

In the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrically nonlinear exact equations of the theory of elasticity, the method developed for the determination of the stress distribution in the unidirectional fibrous composites with locally curved fibres is used to investigate related normal stresses for the case where the interaction between the fibres is not taken into account. All investigations are made for an infinite elastic body containing a single locally curved fibre. Under uniaxial loading along the fibre the normal stresses acting on the interface are studied and the numerical results illustrated the effect of the geometrical nonlinearity on the distribution of the stresses are presented.

Keywords: Unidirectional fibrous composite, local curving, geometrical nonlinearity, normal stresses.

MSC number/numarası: 74B15, 74EE10, 74D10.

GEOMETRİK NONLİNEERİTE DURUMUNDA YEREL EĞRİLİKLİ LİF İÇEREN ELASTİK ORTAMDAKİ NORMAL GERİLMELER HAKKINDA

ÖZET

Yerel eğrilikli lifler içeren tek yönlü lifli kompozitlerde gerilme yayılımının belirlenmesi için, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç-boyutlu geometrik nonlineer kesin denklemleri kullanılarak geliştirilen yöntem ilgili normal gerilmelerin araştırılmasında, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum için, kullanılmıştır. Tüm araştırmalar yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisim için yapılmıştır. Lif boyunca yapılan tek yönlü yükleme altında arayüzeydeki normal gerilmeler çalışılmış ve bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Tek yönlü lifli kompozitler, yerel eğrilik, geometrik nonlineerite, normal gerilmeler.

1. GİRİŞ

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki liflerin eğriliği ya dizayn gereksiniminden yada teknolojik işlemler esnasında ortaya çıkmaktadır [1-5]. Genellikle dizayn gereksiniminden ortaya çıkan eğrisellikler periyodik eğrilikler, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkanlar ise yerel eğrilikler olarak modellenirler. Dolayısıyla, tek yönlü lifli kompozit malzemelerde gerilme-şekil değiştirme durumu araştırmalarında liflerin eğriliğini dikkate almak teorik ve uygulama açısından önemlidir. Bu amaçla [6]'da, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak tek yönlü kompozitlerde, yukarıda sözü edilen gerilme

* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-mail/e-ileti: kosker@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 17 29

On the Normal Stresses in the Elastic Body with ...

işlemlerde, (1) üst indisi matris ile ilgili büyüklükleri, (2) üst indisi lif ile ilgili büyüklükleri gösterecektir. Geometrik nonlineerite durumunda, lif ve matris malzemelerinin herbirinde ayrı ayrı sağlanmak üzere denklemleri, şekil değiştirme-yerdeğiştirme ilişkileri ve bünye denklemlerini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[\sigma^{(k)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] &= 0, \\ 2\varepsilon_{jm}^{(k)} &= \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \\ \sigma_{(in)}^{(k)} &= \lambda^{(k)} e^{(k)} \delta_1^n + 2\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k)}, \quad e^{(k)} = \varepsilon_{(11)}^{(k)} + \varepsilon_{(22)}^{(k)} + \varepsilon_{(33)}^{(k)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ayrıca, lif ve matris arayüzeyi olan S yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığını varsayalım.

$$\sigma^{(1)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_S n_j = \sigma^{(2)in} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2)j} \right) \Big|_S n_j, \quad u^{(1)j} \Big|_S = u^{(2)j} \Big|_S \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinde, geleneksel tansör notasyonu kullanılmıştır ve parantez içine alınan çift indisler, ilgili tansörün fiziksel bileşenlerini göstermektedir. Lifin başlangıç eğriliğini

$$x_1 = F(x_3) = \varepsilon \delta(x_3), \quad x_2 = 0, \quad |x_3| \rightarrow \infty \text{ iken } |\delta(x_3)|, \left| \frac{d\delta(x_3)}{dx_3} \right| \rightarrow 0 \quad (3)$$

denklemleri ile tanımlayalım. Buradaki ε , eğriliğin açık denklemi verildiğinde tanımlanacak olan küçük bir parametredir ($0 \leq \varepsilon < 1$).

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

$Or\theta x_3$ koordinat takımında S arayüzeyinin denklemi $\mathbf{g}(r, \theta, x_3) = r(\theta, t_3) \mathbf{e}_r + x_3(\theta, t_3) \mathbf{e}_3$ şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{e}_r ve \mathbf{e}_3 ortonormal vektörler, t_3 ise $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ olan bir parametredir. Lifin yüzeyine dik kesitler koşuluna göre $r(\theta, t_3)$ ve $x_3(\theta, t_3)$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar:

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta(t_3) (r \cos \theta - \varepsilon \delta(t_3)) + x_3 - t_3 &= 0, \\ r^2 \sin^2 \theta + (1 + \varepsilon^2 (\delta')^2) (r \cos \theta - \varepsilon \delta(t_3))^2 &= R^2, \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3} \end{aligned}$$

Bu denklemlerden ilki normal vektörü, lifin orta çizgisinin teğet vektörü ile çıkan yüzey denklemdir. İkincisi ise, problemin formülasyonunda tanımlanan life dik kesitler koşuludur. Bu denklemlerden

$$\begin{aligned} r(\theta, t_3) &= \frac{\varepsilon \delta(t_3) (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \cos \theta}{1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta} + \\ &\left\{ \frac{\varepsilon^2 (\delta(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2)^2 \cos^2 \theta}{(1 + (\delta'(t_3))^2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta)^2} + R^2 - (\delta(t_3))^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'(t_3))^2) \right\}^{1/2}, \\ x_3(\theta, t_3) &= t_3 - \varepsilon \delta'(t_3) (r(\theta, t_3) - \varepsilon \delta(t_3)) \end{aligned} \quad (4)$$

fonksiyonları elde edilir. Diferansiyel geometrinin bilinen işlemleri ile S yüzeyinin birim normal vektörünün bileşenleri olan n_r , n_θ ve n_3 $\mathbf{g}(r, \theta, x_3) = r(\theta, t_3) \mathbf{e}_r + x_3(\theta, t_3) \mathbf{e}_3$ denklemi ve (4)'den elde edilirler.

Yerel eğriliğin derecesinin küçük olduğunu ($|\varepsilon \delta'(t_3)| \ll 1$) dikkate alırsak, lif ve matristeki gerilme-şekil değiştirme durumunu ifade eden büyüklükleri ε küçük parametresinin

pozitif kuvvetleri cinsinden seri formda yazabiliriz:

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q u_r^{(k),q}, \dots \quad (5)$$

r, z, n_r, n_θ ve n_z büyüklükleri de seri formunda gösterilebilir:

$$r = R + \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q a_{rq}(R, \theta, t_3), \quad z = t_3 + \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q a_{zq}(R, \theta, t_3),$$

$$n_r = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q b_{rq}(R, \theta, t_3), \quad n_\theta = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q b_{\theta q}(R, \theta, t_3), \quad n_z = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q b_{zq}(R, \theta, t_3) \quad (6)$$

(6)'daki ε^q nun katsayıları sıradan matematiksel işlemlerle elde edilirler. (5) ifadeleri (1) denklemlerinde kullanılır ve ε'nun eşit dereceli terimler gruplandırılırsa herbir yaklaşım için tam denklemler sistemi elde edilir. Bu durumda (1) denklemleri sıfıncı yaklaşım için sağlanırlar, bunlardan elde edilecek birinci ve diğer yaklaşımlara ait olanlar ise bir önceki yaklaşıma ait büyüklükleri içereceklerdir. Lif ve matris malzemelerinin rijid olduğunu ve böylece sıfıncı yaklaşım için elde edilen denklemlerde nonlineer terimlerin ihmal edilebileceği, birinci ve diğer yaklaşımlarda ise (g_n^j + ∇_nu^{(k),j,0}) terimlerinin δ_n^j ile yer değiştirebildiği varsayılacaktır. Bu varsayıma göre sıfıncı yaklaşıma ait denklemler takımını

$$\nabla_i \sigma^{(k)ij,0} = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0}, \quad \sigma_{(in)}^{(k),0} = (\lambda^{(k)} e^{(k),0}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),0}),$$

$$e^{(k),0} = \varepsilon_{rr}^{(k),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0} + \varepsilon_{zz}^{(k),0} \quad (7)$$

ve temas koşullarını

$$\sigma_{(ij)}^{(2),0} \Big|_{r=R} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} \Big|_{r=R}, \quad u_{(i)}^{(2),0} \Big|_{r=R} = u_{(i)}^{(1),0} \Big|_{r=R}; \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z \quad (8)$$

olarak elde ederiz. Böylece sıfıncı yaklaşım, (7) deklemlerinin (8) temas koşulları çerçevesinde çözümlenmesine indirgenmiş olur.

Yukarıdaki kabulleri dikkate alırsak diğer yaklaşımlar için

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,q} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,q}] = - \sum_{m=1}^{q-1} \nabla_i (\sigma^{(k)in,q-m} \nabla_n u^{(k)j,m}) \quad (9)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),q} = \nabla_j u_i^{(k),q} + \nabla_i u_j^{(k),q} + \sum_{s=1}^{q-1} \nabla_j u^{(k)n,q-s} \nabla_i u_n^{(k),s} \quad (10)$$

denklemler sistemini elde ederiz. Birinci yaklaşım için (9), (10)'daki altı çizili terimler sıfır olacağından, söz konusu yaklaşım için alan denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nabla_i [\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,1}] = 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1}, \quad \sigma_{(in)}^{(k),1} = (\lambda^{(k)} e^{(k),1}) \delta_i^n + 2(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1}),$$

$$e^{(k),1} = \varepsilon_{rr}^{(k),1} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} + \varepsilon_{zz}^{(k),1} \quad (11)$$

Yukarıdaki işlemleri (2) için de tekrarlar ve yaptığımız kabulleri dikkate alırsak birinci yaklaşım için aşağıdaki temas koşullarını elde ederiz.

$$[\sigma_{(ir)}]_{r,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{r,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{r,0}^{2,0} + \gamma_r [\sigma_{(ir)}]_{r,0}^{2,0} + \gamma_\theta [\sigma_{(i)\theta}]_{r,0}^{2,0} + \gamma_z [\sigma_{(i)z}]_{r,0}^{2,0} = 0$$

$$[u_{(i)}]_{r,1}^{2,1} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{r,0}^{2,0} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{r,0}^{2,0} = 0 \quad (12)$$

On the Normal Stresses in the Elastic Body with ...

(9), (10)'dan ikinci yaklaşım için aşağıdaki alan denklemlerini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,2} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,2} \right] &= -\nabla_i \left(\sigma^{(k)in,1} \nabla_n u^{(k)j,1} \right), \\ 2\varepsilon_{jm}^{(k),2} &= \nabla_j u_m^{(k),2} + \nabla_m u_j^{(k),2} + \nabla_j u^{(k)n,1} \nabla_m u_n^{(k),1}, \quad \sigma_{(in)}^{(k),2} = \left(\lambda^{(k)} e^{(k),2} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),2} \right), \\ e^{(k),2} &= \varepsilon_{rr}^{(k),2} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),2} + \varepsilon_{zz}^{(k),2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Bir önceki yaklaşımda olduğu gibi (2)'den yararlanarak ikinci yaklaşıma ait temas koşullarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{(ir)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} \\ & + \varphi_1 \gamma_r \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,1}^{2,1} + f_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_1 \gamma_\theta \left[\frac{\partial \sigma_{(i\theta)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \gamma_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} \\ & + f_1 \gamma_z \left[\frac{\partial \sigma_{(iz)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_r \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_\theta \left[\sigma_{(i\theta)} \right]_{1,0}^{2,0} + \beta_z \left[\sigma_{(iz)} \right]_{1,0}^{2,0} = 0, \\ & \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2,2} + f_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,1}^{2,1} + \varphi_1 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,1}^{2,1} + f_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2,0} + \varphi_2 \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \\ & (f_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r^2} \right]_{1,0}^{2,0} + f_1 \varphi_1 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial r \partial z} \right]_{1,0}^{2,0} + \frac{1}{2} (\varphi_1)^2 \left[\frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial z^2} \right]_{1,0}^{2,0} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

(13) ve (14)'de sırası ile $(i) = r, \theta, z$ yerdeğiştirmeleri yapılırsa ilgili yaklaşıma ait temas koşullarının fiziksel bileşenlerdeki açık ifadeleri elde edilir. Söz konusu denklemlerde kullanılan fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \left[\varphi \right]_{1,s}^{2,s} &= \varphi^{(2),s} - \varphi^{(1),s}; \quad f_1 = \delta(t_3) \cos \theta; \quad \varphi_1 = -R \delta'(t_3) \cos \theta, \quad f_2 = \frac{R}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + (\delta'(t_3) \cos \theta)^2 \right], \\ \varphi_2 &= -\delta'(t_3) \delta(t_3) \cos^2 \theta, \quad \beta_r = -\left[2\delta(t_3) \delta''(t_3) + (\delta'(t_3))^2 \right] \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \sin^2 \theta + (\delta'(t_3) \cos \theta)^2 \right] \\ \beta_\theta &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \left[\delta(t_3) \delta''(t_3) - \frac{(\delta(t_3))^2}{R^2} \right], \quad \beta_z = -\frac{1}{R} \delta(t_3) \delta'(t_3) \sin^2 \theta, \quad \gamma_r = \left(\frac{\delta(t_3)}{R} - \delta''(t_3) R \right) \cos \theta; \\ \gamma_\theta &= -\frac{\delta(t_3)}{R} \sin \theta; \quad \gamma_z = -\delta'(t_3) \cos \theta; \quad \delta'(t_3) = \frac{d\delta(t_3)}{dt_3}, \quad \delta''(t_3) = \frac{d^2\delta(t_3)}{dt_3^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

Birinci yaklaşım için elde edilen denklemler ile diğeri yaklaşımlar için elde edilen denklemlerin homojen kısmı, üç boyutlu lineerleştirilmiş elastisite denklemleri ile çakışır [14].

Şimdi sıfırcı, birinci ve ikinci yaklaşım için elde edilen sınır-değeri problemlerini çözelim:

Sıfırcı yaklaşım [4, 6]'da da verilen analitik çözüme sahiptir. Buna göre, bu

yaklaşımın çözümü $v^{(1)} = v^{(2)}$ kabulü ile, aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad u_z^{(1),0} = u_z^{(2),0} = \frac{P}{E^{(1)}}z, \quad u_r^{(1),0} = -v^{(1)}\varepsilon_{zz}^{(1),0}r, \quad u_r^{(2),0} = -v^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2),0}r, \\ u_\theta^{(1),0} = u_\theta^{(2),0} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = p\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{ij}^{(1),0} = \sigma_{ij}^{(2),0} = 0. \quad ij = rr, \theta\theta, \theta z, rz, r\theta \end{aligned} \quad (16)$$

Sıfırıncı yaklaşım için elde edilen çözüm, diğer kabuller ve ikinci yaklaşım için elde edilecek sağ taraf fonksiyonlarının çok küçük değer üreteceklerinden ihmal edilebileceği dikkate alınırsa, birinci ve ikinci yaklaşım için denge denklemleri, tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),q}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k),q} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),q}) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),q}}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),q}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k),q} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k),q}}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),q}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k),q} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),q}}{\partial z^2} = 0, \quad q = 1, 2 \end{aligned} \quad (17)$$

Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde, şekil değiştirme yerdeğiştirme ilişkileri aşağıdaki hale gelirler.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k),q} = \frac{\partial u_r^{(k),q}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k),q}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k),q}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k),q}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),q}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k),q}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),q} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k),q}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k),q}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),q}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k),q}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),q} = \frac{\partial u_z^{(k),q}}{\partial z}, \quad q = 1, 2 \end{aligned} \quad (18)$$

Birinci yaklaşımla ilgili (12), (17), (18) ve ikinci yaklaşımla ilgili (14), (17), (18) denklemlerini çözmek için [14]'de verilen aşağıdaki gösterimleri kullanacağız.

$$\begin{aligned} u_r^{(k),q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k),q} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k),q}; \quad u_\theta^{(k),q} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k),q} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k),q}; \quad \Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ u_z^{(k),q} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1^{(k)} + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k),q}; \quad q = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Buradaki $\psi^{(k),q}, \chi^{(k),q}$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k),q} = 0; \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k),q} = 0 \quad (20)$$

(20)'deki $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2; i=1,2,3$)'ler sabittirler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}. \quad (21)$$

(3) denlemini aşağıdaki gibi seçeceğiz.

$$x_1 = A \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right) = \varepsilon L \exp \left(- \left(\frac{x_3}{L} \right)^2 \right) \cos \left(m \frac{x_3}{L} \right); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (22)$$

On the Normal Stresses in the Elastic Body with ...

$L > A$ olduğunu kabul edeceğiz ve böylece ε küçük parametresini (22) olduğu gibi tanımlayacağız. Bundan başka (22)'de kullanılan, A yerel eğriliğin maksimum genliğini, L geometrik parametreyi, m ise yerel eğrilik modunun salınım karakterini göstermektedir. Birinci ve ikinci yaklaşımla ilgili denklemlere ve bunları çözmek için kullanacağımız gösterilimlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (23)$$

ile verilen üstel fourier dönüşümü uygular, ilgili sınır koşullarındaki sağ taraf fonksiyonlarını da dikkate alarak (20) ile verilen diferansiyel denklemlerinin Fourier dönüşümlü hallerini çözersek, bu yaklaşımların Fourier dönüşümlerinin değerlerini belirlerken kullanacağımız $\psi^{(k),1}$, $\chi^{(k),1}$ ve $\psi^{(k),2}$, $\chi^{(k),2}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(2),1} &= \bar{A}_1^{(2)}(s) I_1\left(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}\right) \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{(2),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(2)}(s) I_1\left(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_3^{(2)}(s) I_1\left(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}\right) \right] \cos \theta \\ \bar{\psi}^{(1),1} &= \bar{A}_1^{(1)}(s) K_1\left(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L}\right) \sin \theta, \\ \bar{\chi}^{(1),1} &= i \left[\bar{A}_2^{(1)}(s) K_1\left(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_3^{(1)}(s) K_1\left(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L}\right) \right] \cos \theta \quad (24) \\ \bar{\psi}^{(2),2} &= \bar{A}_{12}^{(2)}(s_1) I_2\left(\xi_1^{(2)} s_1 \frac{r}{L}\right) \sin 2\theta, \\ \bar{\chi}^{(2),2} &= i \left[\bar{A}_{20}^{(2)}(s_1) I_0\left(\xi_2^{(2)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_{30}^{(2)}(s_1) I_0\left(\xi_3^{(2)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \left\{ \bar{A}_{22}^{(2)}(s_1) I_2\left(\xi_2^{(2)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_{32}^{(2)}(s_1) I_2\left(\xi_3^{(2)} s_1 \frac{r}{L}\right) \right\} \cos 2\theta \right] \\ \bar{\psi}^{(1),2} &= \bar{A}_{12}^{(1)}(s_1) K_2\left(\xi_1^{(1)} s_1 \frac{r}{L}\right) \sin 2\theta, \\ \bar{\chi}^{(1),2} &= i \left[\bar{A}_{20}^{(1)}(s_1) K_0\left(\xi_2^{(1)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_{30}^{(1)}(s_1) K_0\left(\xi_3^{(1)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \left\{ \bar{A}_{22}^{(1)}(s_1) K_2\left(\xi_2^{(1)} s_1 \frac{r}{L}\right) + \bar{A}_{32}^{(1)}(s_1) K_2\left(\xi_3^{(1)} s_1 \frac{r}{L}\right) \right\} \cos 2\theta \right] \quad (25) \end{aligned}$$

Buradaki $I_n(x)$ sanal argümanlı Bessel fonksiyonları ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonlarıdır. Ayrıca, Fourier dönüşüm parametresi olarak (24)'de s , (25)'de s_1 kullanılmıştır. (24-25) fonksiyonları ilgili yaklaşımların sınır-değer problemlerinde kullanılır ve böylece ulaşılabilecek lineer denklemler takımı çözümlerse, ulaşılmak istenen gerilmelerin birinci ve ikinci yaklaşımlarının Fourier dönüşümlü durumlarını hesaplamaya yarayacak büyüklükler belirlenmiş olur. Asıl gerilme değerlerine ulaşmak için, örneğin $\sigma_{rr}^{(1),1}$ için aşağıda verilen ters Fourier dönüşümü uygulanır.

$$\sigma_{rr}^{(1),1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_{rr}^{(1),1} e^{isz} ds \quad (26)$$

4. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Birinci yaklaşımla ilgili olan lineer denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz gerilme büyüklüklerinin s Fourier parametresine bağlı Fourier Dönüşümlü değerleri bulunmuş olur. Gerçek değerlere ulaşmamız için kullanmamız gereken Ters Fourier Dönüşümündeki

$\int_{-\infty}^{+\infty} (.)ds$ integral, büyüklüklerin tek veya çift olmalarından dolayı $\int_0^{+\infty} (.)ds$ haline gelmiş olur. Bu integral

$$\int_0^{+\infty} (.)ds \equiv \int_0^{S^*} (.)ds = \sum_{i=0}^N \int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds \quad (27)$$

yaklaşımıyla çözülmüştür. N ve S_* değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş parametreler olmak üzere $S_0 = 0$, $S_N = S_*$, olarak kullanılmıştır. Ayrıca $\int_{S_i}^{S_{i+1}} (.)ds$ integralinin sayısal hesabı için 10 noktalı Gaus-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. İkinci yaklaşım ile ilgili sınır koşullarında birinci yaklaşım ile ilgili büyüklükler mevcuttur. Bu büyüklükleri elde etmek için (26) ile verilen Ters Fourier Dönüşümü kullanılır, bu temas koşullarına önceki kısımda verilen Fourier Dönüşümü uygulanır ve fonksiyonların tek veya çift olma özellikleri de dikkate alınır. Sağ tarafında bir ve iki katlı integrallerin olduğu lineer denklemler sistemine ulaşılır. Bu denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz değerlerin Fourier Dönüşümlü hesaplarında kullanacağımız bilinmeyenler elde edilmiş olacaktır. Elde etmek istediğimiz büyüklüklerin ikinci yaklaşımdaki gerçek değerlerine ulaşmak için Ters Fourier Dönüşümüne ihtiyacımız vardır. Dolayısıyla burada da bir integrasyon hesabına başvurmak gerekir. Sonuçta üç katlı integralin hesabı ile karşılaşılır. Bu hesap

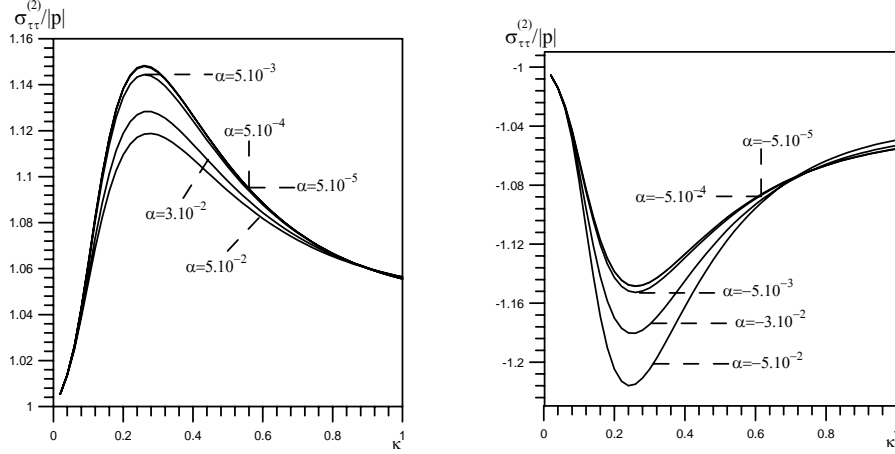
$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (.)dsdzds_1 = \int_0^{S_0^{(1)}} \int_0^{Z_0} \int_0^{S_0^{(2)}} (.)dsdzds_1 = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \sum_{k=0}^{N_3} \int_{S_i^{(1)}}^{S_{i+1}^{(1)}} \int_{Z_j}^{Z_{j+1}} \int_{S_k^{(2)}}^{S_{k+1}^{(2)}} (.)dsdzds_1 \quad (28)$$

yaklaşımıyla yapılır. Burada $S_0^{(1)} = Z_0 = S_0^{(2)} = 0$ ve $N_1, N_2, N_3, S_*^{(1)}, Z_*, S_*^{(2)}$ değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş olmak üzere $S_{N_1}^{(1)} = S_*^{(1)}, Z_{N_2} = Z_*, S_{N_3}^{(2)} = S_*^{(2)}$ dir. Sözü edilen üç katlı integral 10 noktalı Gauss-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Sayısal hesaplar için gerekli algoritmalar ve bunların FTN 77 programlama diliyle kodlaması tarafımızdan geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

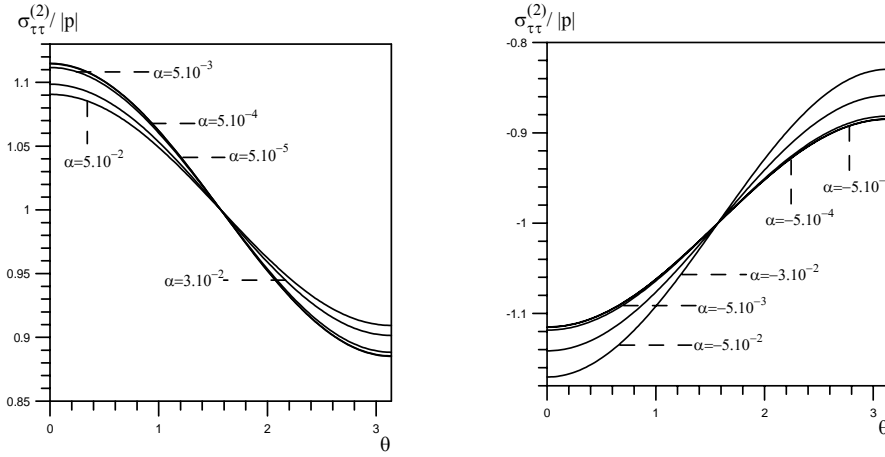
Burada vereceğimiz sayısal sonuçlar $\sigma_{\tau\tau}$ normal gerilmelere ait ve sıfırıncı, birinci, ikinci yaklaşım çerçevesinde elde edilen sonuçlar olacaktır. Bu gerilmeler, matris ve lif arakesit yüzeyi olan S yüzeyinin τ teğet vektörü doğrultusunda, lifin eksenine dik kesitlerinin S yüzeyi üzerindeki noktalarında etki gösteren normal gerilmelerdir. Yerel eğriliğin ihmal edilmesi durumuna karşılık gelen $\varepsilon = 0$ halinde $\sigma_{\tau\tau}$ gerilmeleri σ_{zz} ile çakışır. Gerilmelerin hesabında geometrik lineerliğin parametrelerinin geçerlilik sınırlarının belirlenmesi, geometrik nonlineeritenin etkisinin dikkate alınması ile mümkün olduğundan bu etkinin incelenmesi bu açıdan da öneme sahiptir.

Sayısal sonuçlar için $\kappa = R/L$ parametresi tanımlayalım ve $v^{(1)} = v^{(2)} = 0.3$, $\varepsilon = 0.07$, $\theta = 0$ ve aksi belirtilmedikçe $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ değerlerinin kullanıldığını ve yer darlığından dolayı, sadece $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}$ ile ilgili sayısal sonuçların verileceğini belirtelim. Geometrik nonlineeritenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha = p/E^{(1)}$ parametresini kullanalım. Şekil 2'de $x_3/L = 1.0$, $m = 1$ değerlerinde $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile κ arasındaki ilişkiye; Şekil 3'de ise $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 0.9$, $m = 1$ değerlerinde $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile θ arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeritenin etkisi görülmektedir.

On the Normal Stresses in the Elastic Body with ...

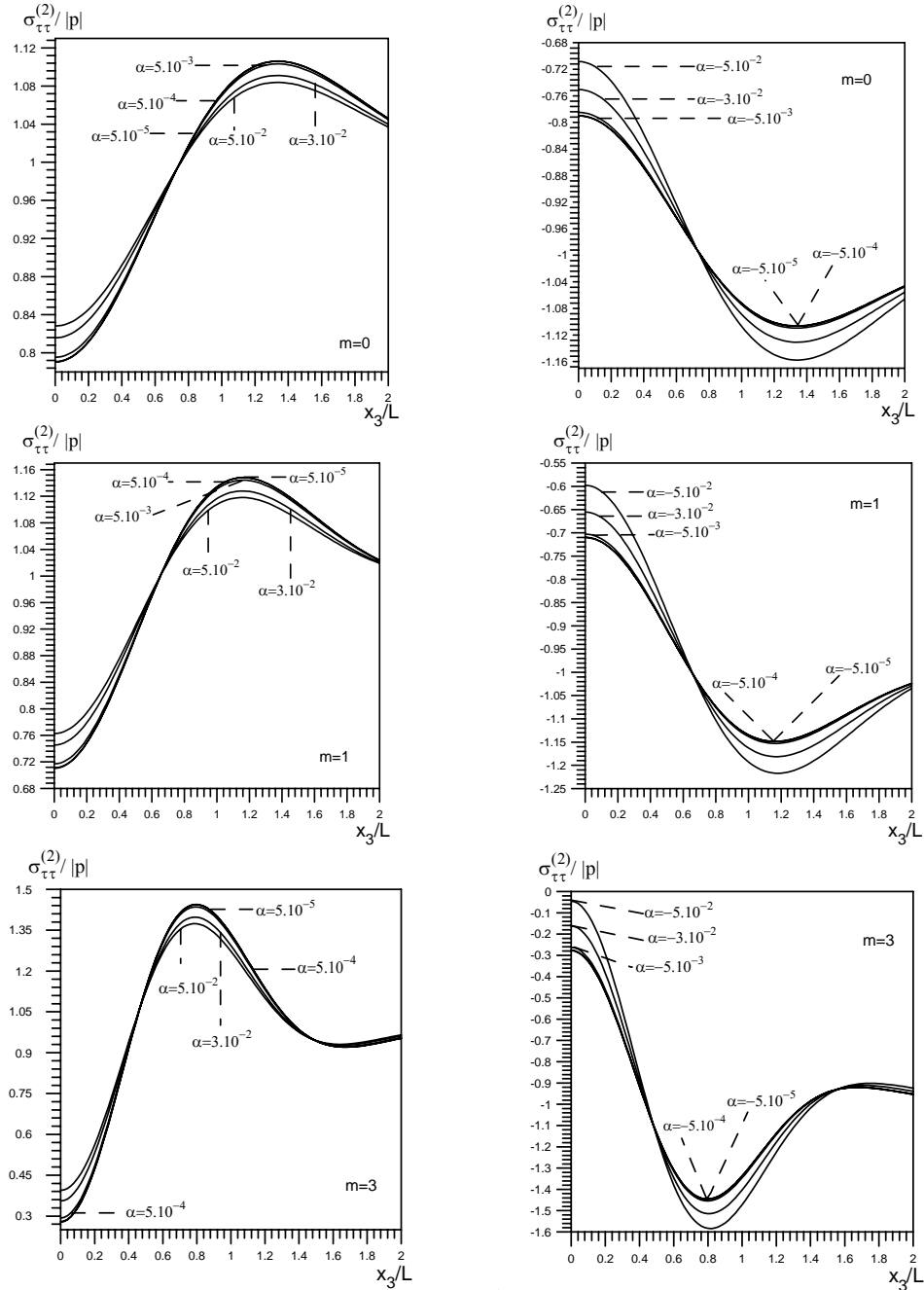


Şekil 2. $x_3/L = 1.0$, $m = 1$ değerlerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile κ arasındaki bağımlılık



Şekil 3. $\kappa = 0.3$, $x_3/L = 0.9$, $m = 1$ için, çeşitli α 'larda $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile θ arasındaki bağımlılık

Şekil 4'de $\kappa = 0.25$ değerlerinde $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile x_3/L arasındaki ilişkiye geometrik nonlineeritenin ve m parametresinin etkisi görülmektedir. Bu grafiklerden, geometrik nonlineeritenin etkisi olarak, $|\alpha|$ büyüdükçe gerilmelerin değerlerinin çekme durumunda mutlak olarak azaldığı, basınç durumunda mutlak olarak arttığı izlenmektedir. α değerlerinin, basınç durumunda, ilgili stabilite kaybı değerlerinden ([2]) küçük alındığını belirtelim.



Şekil 4. $\kappa = 0.25$ değerinde, çeşitli α 'lar için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 3$

Çizelge 1. $x_3/L=1.0$, $\kappa=0.3$ için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ 'nin çeşitli α 'larda birinci ve ikinci yaklaşım değerleri

m	$\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}$	Y N	$\alpha = \frac{p}{E^{(1)}}$							
			Çekme				Basınç			
			5.10^{-5}	5.10^{-3}	3.10^{-2}	5.10^{-2}	-5.10^{-5}	-5.10^{-3}	-3.10^{-2}	-5.10^{-2}
0	10	1	1.036	1.035	1.033	1.032	-1.036	-1.036	-1.035	-1.040
		2	1.032	1.030	1.025	1.023	-1.032	-1.030	-1.029	-1.030
	20	1	1.050	1.049	1.045	1.043	-1.050	-1.051	-1.056	-1.061
		2	1.049	1.046	1.037	1.033	-1.049	-1.048	-1.048	-1.052
	50	1	1.065	1.063	1.056	1.052	-1.065	-1.067	-1.078	-1.092
		2	1.068	1.063	1.048	1.040	-1.068	-1.067	-1.072	-1.084
	100	1	1.067	1.065	1.058	1.053	-1.067	-1.069	-1.081	-1.096
		2	1.072	1.066	1.049	1.040	-1.072	-1.071	-1.076	-1.089
1	10	1	1.069	1.068	1.065	1.063	-1.069	-1.069	-1.073	-1.077
		2	1.067	1.658	1.060	1.058	-1.067	-1.067	-1.068	-1.072
	20	1	1.095	1.094	1.088	1.083	-1.095	-1.097	-1.106	-1.115
		2	1.097	1.094	1.084	1.079	-1.097	-1.097	-1.103	-1.112
	50	1	1.125	1.123	1.111	1.103	-1.125	-1.129	-1.148	-1.172
		2	1.132	1.126	1.108	1.098	-1.132	-1.133	-1.149	-1.172
	100	1	1.137	1.133	1.119	1.110	-1.137	-1.141	-1.166	-1.197
		2	1.146	1.139	1.117	1.104	-1.146	-1.148	-1.169	-1.202
3	10	1	1.175	1.173	1.166	1.161	-1.175	-1.177	-1.186	-1.195
		2	1.174	1.173	1.166	1.161	-1.174	-1.176	-1.185	-1.194
	20	1	1.242	1.238	1.223	1.213	-1.242	-1.246	-1.267	-1.290
		2	1.237	1.233	1.218	1.209	-1.237	-1.240	-1.260	-1.281
	50	1	1.320	1.313	1.284	1.266	-1.320	-1.328	-1.373	-1.427
		2	1.308	1.173	1.166	1.256	-1.308	-1.314	-1.356	-1.405
	100	1	1.361	1.352	1.314	1.291	-1.361	-1.371	-1.435	-1.516
		2	1.344	1.336	1.300	1.278	-1.344	-1.353	-1.411	-1.485

Çizelge 1'de ise $x_3/L=1.0$, $\kappa=0.3$ için $\sigma_{\tau\tau}^{(2)}/|p|$ 'nin çeşitli α 'larda birinci ve ikinci yaklaşım değerleri verilmiştir. Açık ki, birinci yaklaşıma kadar elde edilen sayısal sonuçlar, parametrelerin etkileri hakkında genel fikir verebilmesine rağmen, ikinci yaklaşıma kadar elde edilen sonuçlar hassasiyet açısından birinci yaklaşıma kadar elde edilenlerden daha iyidir. Bu Çizelgeden $E^{(2)}/E^{(1)}$ büyüdükçe gerilme değerlerinin de mutlak olarak büyüdüğü gözlenmektedir. Ayrıca, Çizelge ve grafiklerden, m parametresi değerinin artması ile normal gerilme değerlerinin de arttığını söyleyebiliriz.

TEŞEKKÜR

Bu araştırma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nce desteklenmiştir. Proje No: 24-07-03-01.

KAYNAKLAR

- [1] Tarnopolsky Yu.M., Jigun I.G. and Polyakov V.A., "Spatially-reinforced composite materials", Handbook, Mashinostroyeniya, Moscow, 1987 (in Russian).
- [2] Guz A.N., "Failure mechanics of composite materials in compression". -Kiev: Naukova Dumka, 1990. -630 p. (in Russian.)
- [3] Kelly A., "Composite Materials: impediments do wider use and some suggestions to overcome these", In Proceeding Book ECCM-8, 3-6 June 1998, Naples-Italy, Vol.I, 15-18.
- [4] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., "Mechanics of Curved Composites",-Kluwer Academic Publishers, 2000-464p.
- [5] Guz A.N., "On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of Cracked Composites", Int. Appl. Mech., 2003, 39, N0:3, 274-285.
- [6] Akbarov, S.D. and Guz, A.N. "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites With Curved Structures", Soviet Applied Mechanics, -1985-March-p.777-785.
- [7] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., "Mechanics of curved composites (piecewise homogenous body model)", Int. Appl. Mech., 2002, 38, N0:12, 1415-1439.
- [8] Kosker R. and Akbarov, S.D., "Influence of the interaction between two neighbouring periodically curved fibers on the stress distribution in a composite material", Mechanics of Composite Materials,2003, Vol.39, No. 2, 165-176.
- [9] Akbarov, S.D. and Kosker R., "On a stress analysis in the infinite elastic body with two neighbouring curved fibers", Composites Part B: Engineering, 2003, 34/2, 2003, 143-150.
- [10] Djafarova E.K., "On the solution method of the stress-strain state problems in the fibrous composites with locally curving structures", Tr. Nauch. Konf. Molod. Uchyon. In-ta Mekhan. AN Ukr., Kiew, 1992.-Part I. -p.39-44 (in Russian).
- [11] Djafarova E.K., "Distribution of self-equilibrated stresses in fibrous composite materials with local curving in the structures", Dep. In VINITI, N 2166-B94, 07.09.1994. -34p (in Russian).
- [12] Djafarova E.K., "Stress state in composite materials with local curving fibers", Dissertation for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Inst. Methem. And Mekhan. AN Azerb. Republ. Baku, 1995. -110p. (in Russian).
- [13] S. D. Akbarov, R.Kosker and K. Simsek, "Stress Distribution In An Infinite Elastic Body With A Locally Curved Fiber In A Geometrically Nonlinear Statement" Mechanics of Composite Materials, 41 (4): 291-302, July, 2005.
- [14] Guz, A.N. "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", -Springer, 1999-555p.