σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
Vol./Cilt 25
Issue/Sayı 4

Invited Review Paper / Çağrılı Derleme Makalesi

KOLMOGOROV-SMIRNOV, LILLIEFORS AND SHAPHIRO-WILK TESTS FOR NORMALITY

Mehmet GENCELİ*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Esenler-İSTANBUL

Geliş/Received: 16.10.2007

ABSTRACT

The normality assumption has been at the core of a majority of standard statistical procedures and it is important to be able to test this assumption. Therefore testing normality has attracted broad interest of statisticians for decades. Among many procedures used to test this assumption one of the most well-known test is the Kolmogorov-Smirrnov test for univariate normal distributions. But interest in this topic was accelerated by the Shaphiro-Wilk test of normality.
Due to the fact that the Turkish statistical literature is lacking from these tests the main interest of this paper to introduce these tests in question.
Keywords: Univariate normal distribution, normality tests, Kolmogorov-Smirnov and Lilliefors tests of normality, Shaphiro-Wilk test.
MSC number/numarası: 65C60.

TEK DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLAR İÇİN KOLMOGOROV-SMIRNOV, LILLIEFORS VE SHAPHIRO-WILK NORMALLİK TESTLERİ

ÖZET

Normal dağılım varsayımı çoğu zaman İstatistik işlemleri için kolaylaştırıcı bir işlev yapmaktadır. İstatistik, özellikle Tümevarım İstatistik için bu denli önemli olmasına rağmen tüm Türkçe yazında Normallik testlerinin metodolojisine ilişkin herhangi bir yayın bulunmadığı bir yana yabancı dillerdeki İstatistik kitaplarında da Kolmogorov-Smirnov Testi dışındaki testler ancak son zamanlarda yer almaya başlamıştır. Gerek 1933'de yayınlanan Kolmogorov-Smirnov, gerekse 1965'de İstatistik yazınına giren Shaphiro-Wilk testlerinin Türkçe yazında bulunmamasının bir eksiklik olduğu düşüncesi ile bu testlerin tanıtılması amaçlanmaktadır.
Anahtar Sözcükler: Normal dağılım, normallik testleri, Kolmogorov-Smirnov testi, Lilliefors testi, Shaphiro-Wilk testi.

1. GİRİŞ

İstatistik'te Normal dağılım varsayımı standart istatistik işlemlerinin çoğu için esas olup çözümlerde de maymuncuk görevi yapmaktadır. Nitekim Türkçe ve yabancı dildeki İstatistik kitaplarının özelikle "Tümevarım İstatistik" Bölümlerinde,"… Normal dağılan bir ana kütleden çekilen 20 birimlik bir örnek….", "…sınav sonuçlarının Normal dağıldığı bir sınıftan çekilen 15 sınav kağıdı …" veya "… $n_1 = 28, n_2 = 26$ olan iki örneğin ana kütle varyanslarının eşitliği için F-testine başvurulur…." gibi cümlelere ve bu problemin Normal dağılıma dayanan çözümlerine hep rastlanılmaktadır.

Kısaca, gerek yabancı dilde, gerekse Türkçe yayınlanan ders kitaplarında Normal

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: e-mail / e-ileti:mehmetgenceli@yahoo.com, tel: (212) 449 17 06

Dağılıma dayanan çözümler yadsınamaz bir biçimde yer alırken özellikle Türkçe yazında Normal dağılıma uygunluk hemen hemen hiç irdelenmemiş bir konu olarak süregelmektedir [1].

Gerçi yabancı dildeki ders kitaplarında da durum pek farklı değildir. Bununla beraber Normal dağılıma uygunluk testleri artık yabancı dilde yayınlanan bir çok ders kitabında yer almaktadır [2]. Nitekim başlangıçta Pearson ve Fisher sınamaları, χ^2 Normal dağılıma uygunluk testi, Kolmogorov-Smirnov testi ile sınırlı kalan yabancı yazında Normallik testleri, 1965'de Shaphiro-Wilk'in makalelerinin yayınlanmasından [3] sonra başlıca ilgi alanlarından biri haline gelmiştir.

Bu ilgi ile bağlantılı olarak da sayısız normallik testleri önerilerek adı geçen testler için momentlere dayanan testler, ampirik dağılım fonksiyonları testleri ve regresyon-korrelasyon testleri şeklinde üçlü bir gruplama yapılagelmektedir.

Regresyon-Korrelasyon grubu içinde öne çıkan Anderson-Darling [4], Shaphiro-Wilk, Shaphiro-Francia [5], Epps-Pulley [6] ve diğer tüm "omnibus" testleri [7] arasında Shaphiro-Wilk W testi özel bir konuma sahip olup tüm paket programlarının kapsamında bulunmaktadır.

Türkçe yazın ise İstatistik'teki bu gelişmelere ne yazık ki ayak uyduramamıştır. Dolayısıyla burada 1933'de yayınlanmasından beri Türkçe yazında yerini alamamış olan Kolmogorov –Smirnov Testi'nin ana hatları ile gene aradan kırk iki yıl geçmesine rağmen Türkçe İstatistik yazınında hiç değinilmeyen Shaphiro-Wilk Testi'ne yer verilecektir.

2. KOLMOGOROV-SMIRNOV VE LILLIEFORS TESTLERİNİN ANA HATLARI

Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors Normallik Testleri , $X_1, X_{2,} ....X_n$ sürekli raslantısal değişkenlerden oluşan ve herbirinin aynı dağılıma sahip olduğu örnek verilerinin ampirik dağılım fonksiyonu S(x) ile sürekli olan bir F(x) teorik dağılımı arasındaki uyumu sınamaktadır. F(x)'in hesabında Kolmogorov-Smirnov testi için parametre değerlerinin bilinmesi bir koşul iken, Lilliefors'da tahmincilerden hareket edilmektedir. Rastlantısal örnek birimlerinin küçükten büyüğe sıralanmaları halinde örnek veya ampirik dağılım fonksiyonu

$$S(x) = \begin{cases} 0 & x < x_{(1)} \\ (i/n) & x_{(i)} \le x \le x_{(i+1)} \quad i=1,2,...,(n-1) \\ 1 & x \ge x_{(n)} \end{cases} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [9].

S(x) sıralanmış süreksiz raslantısal değişkenleri göstermekte ve x'e eşit ve x'den küçük örnek birimlerinin oranını vermektedir.

Diğer taraftan Cantelli-Glivenko önermesine göre de

$\sup\left|F(x) - S(x)\right| \to 0$ dır [8]. Bu bağlamda da

$$D = mak.\left|S(x_i) - F(x_i)\right| \tag{2}$$

Kolmogorov-Smirnov test istatistiği olarak adlandırılmaktadır [10]. D örnek kapsamındaki herhangi bir x için ampirik dağılım fonksiyonu S(x) ile teorik dağılım fonksiyonu F(x) arasındaki dikey mesafeyi vermekte, bu da teorik dağılıma uygunluk ölçüsü olarak kullanılmaktadır. Ancak, S(x)'in süreksiz olması nedeniyle, maksimum mutlak fark ampirik dağılımın her iki ucunda da gerçekleşebileceğinden yetersiz kalan (2) formülü yerine

$$D = mak.\left\{\left|S(x_i - F(x_i)\right|, \left|S(x_{i-1} - F(x_i)\right|\right\} \tag{3}$$

formülü kullanılmaktadır[11].

Öte yandan $E[S(x)] = F(x)$ [12] olmasından dolayısıyla S(x)'in F(x)'in sistematik hatasız bir tahmincisi olduğu belirtilebilir. Böylece sürekli dağılımlarda F(x)'e bağlı olmayan

D'ler sadece ve sadece örnekleme hatalarının simgelemektedirler. Buna göre de farkların büyüklüğü teorik bir dağılıma uygunluk için ölçü olarak alınmaktadır.

Öte yandan D test istatistiğinin karşılaştırılacağı D_α kritik değerleri de Çizelge 1'de verilmektedir.

Çizelge 1. Kolmogorov-Smirnov Test İstatistiği için D_α Kritik Değerleri

Values of ε for which α= Prob. ($D_n \geq$ ε) and P=Prob. ($D_n^* \leq$ε)

n	α= .10	α= .05 (*P*=.90)	α= .025 (*P*=.95)	α= .01 (*P*=.98)	α= .005 (*P*=.99)
1	.90000	.95000	.97500	.99000	.99500
2	.68377	.77639	.84189	.90000	.92929
3	.56481	.63604	.70760	.78456	.82900
4	.49265	.56522	.62394	.68887	.73424
5	.44698	.50945	.56328	.62718	.66853
6	.41037	.46799	.51926	.57741	.61661
7	.38148	.43607	.48342	.53844	.57581
8	35831	.40962	.45427	.50654	.54179
9	.33910	.38746	.43001	.47960	.51332
10	.32260	.36866	.40925	.45662	.48893
11	.30829	.35242	.39122	.43670	.46770
12	.29577	.33815	.37543	.41918	.44905
13	.28470	.32549	.36143	.40362	.43247
14	.27481	.31417	.34890	.38970	.41762
15	.26588	.30397	.33760	.37713	.40420
16	.25778	.29472	.32733	.36571	.39201
17	.25039	.28627	.31796	.35528	.38086
18	.24360	.27851	.30936	.34569	.37062
19	.23735	.27136	.30143	.33685	.36117
20	.23156	.26473	.29408	.32866	.35241
21	.22617	.25858	.28724	.32104	.34427
22	.22115	.25283	.28087	.31394	.33666
23	.21645	.24746	.27490	.30728	.32954
24	.21205	.24242	.26931	.30104	.32286
25	.20790	.23768	.26404	.29516	.31657
26	.20399	.23320	.25907	.28962	.31064
27	.20030	.22898	.25438	.28438	.30502
28	.19680	.22497	.24993	.27942	.29971
29	.19348	.22117	.24571	.27471	.29466
30	.19032	.21756	.24170	.27023	.28987
31	.18732	.21412	.23788	.26596	.28530
32	.18445	.21085	.23424	.26189	.28094
33	.18171	.20771	.23076	.25801	.27677
34	.17909	.20472	.22743	.25429	.27279
35	.17659	.20185	.22425	.25073	.26897
36	.17418	.19910	.22119	.24732	.26532
37	.17188	.19646	.21826	.24404	.26180
38	.16966	.19392	.21544	.24089	.25843
39	.16753	.19148	.21273	.23786	.25518
40	.16547	.18913	.21012	23494	.25205

n	α= .10	α= .05 (*P*=.90)	α= .025 (*P*=.95)	α= .01 (*P*=.98)	α= .005 (*P*=.99)
41	.16349	.18687	.20760	.23213	.24904
42	.16158	.18468	.20517	.22941	.24613
43	.15974	.18257	.20283	.22679	.24332
44	.15796	.18053	.20056	.22426	.24060
45	.15623	.17856	.19837	.22181	.23798
46	.15457	.17665	.19625	.21944	.23544
47	.15295	.17481	.19420	.21715	.23298
48	.15139	.17302	.19221	.21493	.23059
49	.14987	.17128	.19028	.21277	.22828
50	.14840	.16959	.18841	.21068	.22604
51	.14697	.16796	.18659	.20864	.22386
52	.14558	.16637	.18482	.20667	.22174
53	.14423	.16483	.18311	.20475	.21968
54	.14292	.16332	.18144	.20289	.21768
55	.14164	.16186	.17981	.20107	.21574
56	.14040	.16044	.17823	.19930	.21384
57	.13919	.15906	.17669	.19758	.21199
58	.13801	.15771	.17519	.19590	.21019
59	.13686	.15639	.17373	.19427	.20844
60	.13573	.15511	.17231	.19267	.20673
61	.13464	.15385	.17091	.19112	.20506
62	.13357	.15263	.16956	.18960	.20343
63	.13253	.15144	.16823	.18812	.20184
64	.13151	.15027	.16693	.18667	.20029
65	.13052	.14913	.16567	.18525	.19877
66	.12954	.14802	.16443	.18387	.19729
67	.12859	.14693	.16322	.18252	.19584
68	.12766	.14587	.16204	.18119	.19442
69	.12675	.14483	.16088	.17990	.19303
70	.12586	.14381	.15975	.17863	.19167
71	.12499	.14281	.15864	.17739	.19034
72	.12413	.14183	.15755	.17618	.18903
73	.12329	.14087	.15649	.17498	.18776
74	.12247	.13993	.15544	.17382	.18650
75	.12167	.13901	.15442	.17268	.18528
76	.12088	.13811	.15342	.17155	.18408
77	.12011	.13723	.15244	.17045	.18290
78	.11935	.13636	.15147	.16938	.18174
79	.11860	.13551	.15052	.16832	.18060
80	.11787	.13467	.14960	.16728	.17949
81	.11716	.13385	.14868	.16626	.17840
82	.11645	.13305	.14779	.16526	.17732

n	α= .10	α= .05 (*P*=.90)	α= .025 (*P*=.95)	α= .01 (*P*=.98)	α= .005 (*P*=.99)
83	.11576	.13226	.14691	.16428	.17627
84	.11508	.13148	.14605	.16331	.17523
85	.11442	.13072	.14520	.16236	.17421
86	.11376	.12997	.14437	.16143	.17321
87	.11311	.12923	.14355	.16051	.17223
88	.11248	.12850	.14274	.15961	.17126
89	.11186	.12779	.14195	.15873	.17031
90	.11125	.12709	.14117	.15786	.16938
91	.11064	.12640	.14040	.15700	.16846
92	.11005	.12572	.13965	.15616	.16755
93	.10947	.12506	.13891	.15533	.16666
94	.10889	.12440	.13818	.15451	.16579
95	.10833	.12375	.13746	.15371	.16493
96	.10777	.12312	.13675	.15291	.16408
97	.10722	.12249	.13606	.15214	.16324
98	.10668	.12187	.13537	.15137	.16242
99	.10615	.12126	.13469	.15061	.16161
100	.10563	.12067	.13403	.14987	.16081

Kaynak: Miller Leslie H., "Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics", Jasa 1956 (51), 113-115.

Daha önce de Massey tarafından da n<35 için hesaplanan D_α 'lar [13] birer raslantısal değişken olan D_α kritik değerlerinin F(x)'in sürekli olması koşuluna bağlı olarak, F(x)'den bağımsız olmasına dayanmaktadır [14].

Normal bir dağılım için öngörülen

H_0: örnek dağılımı, parametreleri $\mu = \mu_0$ ve $\sigma^2 = \sigma_0^2$ olan bir Normal dağılıma uygundur şeklindeki H_0'ın geçerli olabilmesi ampirik ve teorik dağılımlar arasındaki mutlak farkların düşük olmasına bağlıdır.

D test istatistiğinin oluşturulabilmesi için :

a) Örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır: $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ $X_{(i)} \leq X_{(i+1)}$

b) $i = 1, 2, ..., n$ için $S(x_i) = (i/n)$ ve

c) H_0'da verilen parametre değerleri ile her X için $F(x_i)$ hesaplanır.

d) (3) formülünden hesaplanan $D_{mak.}$ değeri örnek birim mevcuduna bağlı olan D_α kritik değerleri ile karşılaştırılır.

$D_{mak.} < D_\alpha$, H_0'ın reddi için bir neden bulunmadığı hükmüne yol açmakta, $D_{mak.} \geq D_\alpha$ ise H_0'ın reddine, başka bir deyişle, örneğin H_0'da yer alan Normal dağılımdan çekilmediği biçiminde bir yoruma neden olmaktadır.

Kolmogorov-Smirnov Testi parametreleri bilinen sürekli teorik dağılımlar ile sınırlıdır. Bu koşula rağmen test süreksiz teorik dağılımlara uygunluk için de kullanılmaktadır [15]. Ancak süreksiz dağılımlara uygunluk aranması ve/veya parametrelerden en az birinin bilinmeyip tahmincisinin kullanılması durumlarında Kolmogorov-Smirnov Testi konservatif sonuçlar verecektir [16]. Konservatif testler ise H_0 'ın olması gerekenden çok daha az reddine yol açan, dolayısıyla da olması gerekenden çok daha fazla teorik dağılıma uygunluk kararı verdiren testler olarak tanımlanabilir. Bunun için de böyle bir sistematik hatayı engelleyebilmek için sürekli dağılımlarda parametrelerin en az birinin bilinmemesi halinde bundan sonra değinilecek olan Lilliefors Testi, süreksiz teorik dağılımlara uygunluk için de χ^2 testi kullanılmalıdır [17].

3. KOLMOGOROV-SMIRNOV VE LILLIEFORS TESTLERİ İÇİN UYGULAMALAR

Uygulama 1

Çizelge 2

i	X_i	$S(x) = i/11$	$z = (x-3)/i$	$F(x)$	D	D^*
1	0,9	0,090909	-2,1	0,0179	0,0073	0,0179
2	1	0,181818	-2	0,0228	0,159	0,0681
3	1,9	0,272727	-1,1	0,1357	0,137	0,0461
4	2,1	0,363636	-0,9	0,1841	**0,1795***	0,0886
5	2,7	0,454545	-0,3	0,3821	0,0724	0,0185
6	2,8	5454545	-0,2	0,4207	0,1247	0,0338
7	3,2	0,636364	0,2	0,5793	0,0570	0,0338
8	3,6	0,727273	0,6	0,7257	0,0015	0,0893
9	3,9	0,818182	0,9	0,8159	0,0022	0,0886
10	4,2	0,909091	1,2	0,8849	0,0241	0,0667
11	5,1	0,9999	2,1	0,9821	0,0178	0,0730
	31,4					

Kaynak: Lawrence Lapin, Statistics for Modern Business Decisions, Harcourt Brace, New York,1974, 424.

H_0 : Örnek birimlerinin dağılımı $\mu = 3$, $\sigma^2 = 1$ olan Normal dağılıma uymaktadır: $X \sim N(3,1)$

H_1 : dağılım $X \sim N(3,1)$ dağılımına uymamaktadır.

Uygulama 1'in verilerinden elde edilen

$D_i = |S(x_i) - F(x_i)|$ ve $D_i^* = |S(x_{i-1}) - F(x_i)|$ arasında $D_{mak.} = 0,1795$ 'dir.

D test istatistiğinin değeri, n=11 için Çizelge 1'de verilen tüm kritik değerlerden, D_α 'dan küçük olduğundan H_0 'ın reddi için bir neden bulunmamaktadır. Dolayısıyla örnek dağılımının $\mu = 3$, $\sigma^2 = 1$ olan bir Normal dağılıma uyduğu söylenebilecektir.

Uygulama 2

Çizelge 3

i	X_i	$S(x) = i/10$	z	$F(x)$	D	D^*
1	96	0,1	-1,434	0,0758	0,242	0,0758
2	99	0,2	-1,131	0,1290	0,0710	0,0290
3	103	0,3	-0,727	0,2336	0,0664	0,0336
4	108	0,4	-0,525	0,2998	0,1002	0,0002
5	107	0,5	-0,323	0,3733	0,1267	0,0267
6	113	0,6	0,283	0,6114	0,0114	0,1114
7	117	0,7	0,687	0,7540	0,0540	**0,1540***
8	118	0,8	0,788	0,7847	0,0153	0,0827
9	121	0,9	1,091	0,8624	0,0376	0,0624
10	126	1,0	1,596	0,9448	0,0552	0,0448

Kaynak: Bleymüller Joseph,Gehlert Gunther, Gülicher Herbert, "Statistik für Wirtchaftswissenschaften, Verlag Vahlen, München,1979,130.

H_0 : Çizelge 3'de verilen 10 birimlik örnek $\mu = 110,2$, $\sigma^2 = 98,01$ olan ve Normal dağılan bir anakütleden çekilmiştir.

H_0 kapsamında $z = (x - 110,2)/9,9$ ile hesaplanan F(x) ile elde edilen D ve D^* farkları içinde $D_{mak.} = 0,1540$ olmaktadır. $D_{mak.}$ aynı zamanda (1/10)+0,0540=0,10+0,0540=0,1540'dır. Çizelge 1'de n=10 için yer alan kritik değerlere göre 0,1540 her düzeydeki α için anlamlı değildir. Bu nedenle de H_0'ın reddi için herhangi bir kanıt sözkonusu olmamaktadır. Örnek birimleri ortalaması 110,2 ve varyansı 98,01 olan bir Normal dağılıma aittir.

Uygulama 3

H_0 : 33 birimden oluşan aşağıdaki gruplanmış dağılım için H_0 : F(x;30,36) söz konusudur.

Çizelge 4

Sınıflar	f_i	bağıl frekans: f_i / 33	$S(x)$	Sınıf Üst Hududu	$z = (x - 30)/16$	$F(x)$	D	D^*
0-9	1	0,0303	0,0303	9,5	-3,41	0,0003	0,0300	0,0003
10-19	3	0,0909	0,1212	19,5	-1,75	0,0400	0,0812	0,0097
20-29	5	0,3030	0,2727	29,5	-0,08	0,4681	0,1954	0,3469
30-39	10	0,1515	0,5757	39,5	1,58	0,9430	0,3673	**0,6703***
40-49	7	0,2121	0,7878	49,5	3,25	0,9994	0,2116	0,2116
50-59	4	0,1212	0,9090	59,5	4,91	1,0000	0,0910	0,0910
60-69	2	0,0606	0,9696	69,5	6,58	1,0000	0,0304	0,0304
70-79	1	0,0303	0,9999	79,5	8,25	1,0000	0,0001	0,0001

Kaynak: Panik Michael J., "Advanced Statistics From An Elementary Point Of View, Elsevier, New York,629.

Uygulama 3 için $D_{mak.} = 0,6703 = 0,9430 - 0,2727$ hesaplanmıştır.%5 hata payına göre $D_{0,05} = 0,231$ olduğundan örneğin ortalaması 30, standart sapması da 6 olan bir Normal ana kütleden çekildiği savı reddedilecektir.

Uygulama 4

Çizelge 5.

i	X_i	$S(x) = i/20$	$z = (x-127)/10$	$F(x)$	D	D^*
1	120	0,05	-0,70	0,2420	0,1920	0,2420
2	123	0,10	-0,40	0,3446	0,2446	0,2946
3	125	0,15	-0,20	0,4208	0,2708	**0,3208***
4	126	0,20	-0,10	0,4602	0,2602	0,3102
5	126	0,25	-0,10	0,5398	0,2103	0,2602
6	128	0,30	+0,10	0,5398	0,2398	0,2898
7	128	0,35	+0,10	0,5398	0,1898	0,2398
8	128	0,40	+0,10	0,5398	0,1398	0,1898
9	129	0,45	+0,20	0,5792	0,1292	0,1792
10	129	0,50	+0,20	0,5792	0,0792	0,1292
11	129	0,55	+0,20	0,5792	0,0792	0,0792
12	130	0,60	+0,30	0,5792	0,0179	0,0679
13	130	0,65	+0,30	0,5792	0,0321	0,0179
14	130	0,70	+0,30	0,6179	0,0821	0,0321
15	130	0,75	+0,30	0,6179	0,1321	0,0821
16	132	0,80	+0,50	0,6914	0,1086	0,0586
17	132	0,85	+0,50	0,6914	0,1586	0,1086
18	132	0,90	+0,50	0,6914	0,2086	0,1586
19	135	0,95	+0,80	0,7881	0,1619	0,1119
20	138	1,00	+1,10	0,8643	0,1357	0,0857

Kaynak: Panik Michael J., "Advanced Statistics From An Elementary Point Of View, Elsevier, New York,628.

H_0 : Örnek, parametre değerleri $\mu = 127$ ve $\sigma^2 = 100$ olan bir Normal Dağılımdan çekilmiştir.

$H_0 :\ F(x) = F_0 = (x;127,100)$

H_1 ise $H_1 : F(x) \neq F_0 = (x;127,100)$ olmaktadır.

Dördüncü uygulama için $D_{mak.} = 0,3208$ hesaplamıştır. Bu test istatistik değeri ancak $\alpha \leq 0,02$ için reddedilememektedir. Sözgelimi $D_{0,01} = 0,352 > D = 0,3208$ 'dir. $\alpha = 0,05$ için ise $D_{0,05} = 0,294$ olduğundan H_0 reddedilecektir.

Kolmogorov-Smirnov Testin'de H_0 'ın reddedilmesinin sonuçları da tartışılmalıdır, çünkü burada reddedilen Normal dağılıma uygunluk değil, belirli parametre değerlerindeki Normal dağılımdır. Dolayısıyle aranılan Normal dağılıma uygunluk değil, belirli parametre değerlerindeki Normal dağılıma uygunluktur. Başka bir deyişle, örnek dağılımı Normal dağılan bir ana kütleye ilişkin olduğu halde sırf H_0 ’da belirtilen parametreler dolayısıyla olanın tersine bir karar alınabilmektedir. Dolayısıyle, amaç örneğin Normal dağılan bir ana kütleden çekildiği savını araştırmaksa tahmincilerin kullanılması yeterlidir. Böylece olay

H_0 : örnek birimleri Normal dağılan bir ana kütleden çekilmiştir.

H_1 : örnek birimleri Normal dağılan bir ana kütleye uymamaktadır.

şekline dönüşmektedir.

Bu hipotez çerçevesinde $D_{mak.}$ (3) formülünden elde edildiğinden, Çizelge 5 verilerine (3) formülü yerine tahmincilerin kullanıldığı

$$d = mak.\left\{\left|S(x_i) - \widehat{F(x_i)}\right|, \left|S(x_{i-1}) - \widehat{F(x_i)}\right|\right\} \tag{4}$$

formülü kullanılacaktır.

Çizelge 6.

İ	X_i	$S(x)$	$z = (x-129)/3,9868$	$F'(x)$	d	d^*
1	120	0,05	-2,26	0,0119	0,0381	0,0119
2	123	0,10	-1,50	0,0668	0,0332	0,0168
3	125	0,15	-1,00	0,1587	0,0087	0,0587
4	126	0,20	-0,75	0,2266	0,0266	0,0766
5	126	0,25	-0,75	0,2266	0,0234	0,0266
6	128	0,30	-0,25	0,4013	0,1013	0,1513
7	128	0,35	-0,25	0,4013	0,0513	0,1013
8	128	0,40	-0,25	0,4013	0,0013	0,0513
9	129	0,45	0	0,5000	0,0500	0,1000
10	129	0,50	0	0,5000	0	0,0500
11	129	0,55	0	0,5000	0,0500	0,000
12	130	0,60	0,25	0,5987	0,0013	0,0487
13	130	0,65	0,25	0,5987	0,0513	0,0013
14	130	0,70	0,25	0,5987	0,1013	0,0513
15	130	0,75	0,25	0,5987	**0,1513***	0,1013
16	132	0,80	0,75	0,7734	0,0266	0,0234
17	132	0,85	0,75	0,7734	0,0766	0,0266
18	132	0,90	0,75	0,7734	0,1266	0,0766
19	135	0,95	1,50	0,9332	0,0168	0,0322
20	138	1,00	2,26	0,9861	0,0139	0,0361

$\bar{x} = 129$ s=3,9868204 $d_{mak.} = 0,1513$

Çizelge 5’deki sonuçlara göre $D_{mak.} = 0,3208$ olan test istatistiği Çizelge 6’ya göre $d_{mak.} = 0,1513$ ’e inmiştir.

Burada Kolmogorov-Smirnov Çizelgelerinin kullanılması durumunda hem parametre, hem de tahmincileri için aynı kritik değerler geçerli olacaktır.

Nitekim Lilliefors da bu olgudan hareketle Kolmogorov-Smirnov teorik dağılıma uygunluk testlerinde parametreler yerine en az bir tahmincinin kullanılmasıyla hesaplanan $d_{mak.}$ test istatistiği için Kolmogorov-Smirnov Çizelgelerinin geçerli olmadığını savunmuştur [18]. Kolmogorov-Smirnov Çizelgelerinin kullanılması sonucu konservatif testler ile karşı karşıya kalınmakta, böylece H_0 olması gerekenden daha az reddedilmektedir.
Bu biçimdeki bir sistematik hatayı önleyebilmek için de Lilliefors, tahminciler ile elde edilen $F(x)$ 'e özgü bir Çizelge düzenlenmiştir.

Çizelge 7. Lilliefors Çizelgesi

Sample Size N	Level of Significance for D =Max | $F^*(X) - S_N(X)$ |				
	.20	.15	.10	.05	.01
4	.300	.319	.352	.381	.417
5	.285	.299	.315	.337	.405
6	.265	.277	.294	.319	.364
7	.247	.258	.276	.300	.348
8	.233	.244	.261	.285	.331
9	.223	.233	.249	.271	.311
10	.215	.224	.239	.258	.294
11	.206	.217	.230	.249	.284
12	.199	.212	.223	.242	.275
13	.190	.202	.214	.234	.268
14	.183	.194	.207	.227	.261
15	.177	.187	.201	.220	.257
16	.173	.182	.195	.213	.250
17	.169	.177	.189	.206	.245
18	.166	.173	.184	.200	.239
19	.163	.169	.179	.195	.235
20	.160	.166	.174	.190	.231
25	.149	.153	.165	.180	.203
30	.131	.136	.144	.161	.187
30'un üstü	$\frac{.736}{\sqrt{n}}$	$\frac{.768}{\sqrt{n}}$	$\frac{.805}{\sqrt{n}}$	$\frac{.886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.031}{\sqrt{n}}$

Kaynak: Lillieors H.W., "On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown", Jasa 1967(62), 400.

Bu bağlamda uygulama 4'deki 20 birim için Çizelge 1 ve Çizelge 8 değerleri karşılaştırıldığında önemli farklar ortaya çıkmaktadır.

Çizelge 8. n=20 için Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors Çizelgeleri

α	0,10	0,05	0,01
K-S	0,23156	0,21473	0,32866
Lilliefors	0,174	0,190	0,231
Fark	0,0576	0,07473	0,09766

Çizelge 8'de görüldüğü gibi $d_{mak.}$ 'ın fark değerleri içinde kalması halinde , H_0 K-S'ye göre reddedilemediği halde Lilliefors'a göre reddedilmektedir. Bu durum da konservatif testler için bir göstergedir.

Diğer taraftan Çizelge 6 için hesaplanan $d_{mak.} = 0,1513$ Lilliefors Çizelgesine göre de reddedilmemektedir. Bunun sonucu olarak ta 20 birimlik örneğin Normal dağılan bir ana kütleden çekildiğine, fakat bu Normal dağılımın $F_0(x;127,100)$ olmadığına karar verilecektir.

Çizelge 9. Lilliefors'a İlişkin Paket Programı Sonuçları

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]		
	Statistic	df	Sig.
X	,151	20	,200*

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Görüldüğü gibi Çizelge 6'da hesaplanan $d_{mak} = 0,1513$ ile Çizelge 9 aynı sonucu vermektedir.

4. SHAPHIRO-WILK W TESTİ'NİN KURAMSAL ÇERÇEVESİ

Regresyon-Korrelasyon grubu kapsamındaki normallik testleri, dolayısıyla da Shaphiro-Wilk W testi verilerin Normal Olasılık Grafiğindeki dökümüne dayanmaktadır.

Apsisin aritmetik, ordinatın ise logaritmik ölçeğe göre düzenlendiği Normal Olasılık Grafiğinde, (X,Y) ikililerinden oluşan birikimli Normal dağılım verileri bir doğru üzerinde bulunacaktır.

Burada ise (X,Y) ikililerini oluşturan X ve Y nicel değişkenleri yerine sadece X nicel değişkeninden, X_i , $i = 1,2,...,n$ oluşan tek değişkenli bir dağılım söz konusudur. Bunun için de $X_1, X_2, ..., X_n$ verilerinden oluşan bir örneğin Normal dağılıma uygunluğunun sınanmasında kullanılan yöntem farklılık göstermektedir.

Tek değişkenli dağılımlarda, işaretleri de göz önüne alarak küçükten büyüğe doğru sıralanmış olan birimler $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ apsiste, i de sıralanmayı simgelemek üzere, aynı birimlerin $\left[100\left(i-0,5\right)/n\right]$ değerleri de ordinatta yer almaktadır.

Öte yandan aritmetik ölçeğe göre düzenlenmiş apsiste $X_{(i)}$ yerine $z_{(i)} = \left[\left(X_{(i)} - \mu\right)/\sigma\right]$ sıralanmış standart değişkenlerin yer alması ise çok daha uygundur. Başlangıç değeri olarak ta en küçük $z_{(i)}$ değerinden daha küçük, dolayısıyla $\min z_{(i)}$ 'nin solunda yer alacak bir başlangıç değeri alınmalıdır. Örneğin 25 birimden oluşan sıralı bir örnekte en küçük , $X_{(1)} = 17$, en büyük X değişkeni $X_{(25)} = 46$ ve $\overline{X} = 30,4$, σ=7,5683 ise, $z_{(1)} = -1,77$, $z_{(25)} = 2,06$ hesaplanacaktır. Buna göre de absis için başlangıç -2,5, bitiş de 2,5 alınabilir.

Ordinat ise logaritmik ölçeğe göre ve aynı zamanda $\left[100\left(i-0,5\right)/n\right]$ biçiminde düzenlendiğinden, başlangıç, birim sayısına bağlı olarak 0'a yaklaşan fakat hiçbir zaman 0 olamayan 0,01,0,1 gibi sayılarla başlayacaktır.

Örnek birimlerinin Normal dağılmaları halinde $\left[X_{(i)},100\left(i-0,5\right)/n\right]$ ikilileri, Normal dağılıma uymaları ölçüsünde bir doğru üzerinde, en azından doğru etrafında doğruya çok yakın değerlerde bulunacaktır.Shaphiro-Wilk testi de bu ilkeye dayanmaktadır.

$X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ ile, ortalaması 0, varyansı 1 olan bir Standart Normal ana kütleden çekilip küçükten büyüğe sıralanmış n birimlik rastlantısal örnek birimleri simgelenirse, bu birimlerin beklenen değeri

$$E(X)_i = m_i \quad \text{(i=1,2,...,n)} \tag{4}$$

ve sıralanan birimler birbirinden bağımsız olmadıklarından

$$\text{Kov}(X_i, X_j) = v_{ij} \quad \text{(i,j=1,2,...,n)} \tag{5}$$

yazılacaktır [19]. Bu bağlamda da $m'=(m_1, m_2, ..., m_n)$ standart normal tahmincilerin beklenen değerlerinin vektörü, $V=(v_{ij})$ ise kovaryans matrisini vermektedir.

Ayrıca $Y'=(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ile normal dağılıp dağılmadığı belli olmayan herhangi bir ana kütleden çekilip küçükten büyüğe sıralanmış örnek birimlerinin vektörü simgelensin.

Bu çerçevede $\left\{Y_i\right\}$'nin ortalaması μ, varyansı σ^2 olan Normal dağılan bir ana kütleden çekilmiş olan, küçükten büyüğe sıralanmış örnek birimleri olması halinde, ana kütlenin Normal olmasından dolayı örnek te Normal olacağından

$$Y_i = \mu + \sigma X_i \quad \text{(i=1,2,...,n)} \tag{6}$$

yazılacaktır.

Y'nin standart sapması (6)'daki regresyonun eğimini, μ'de sabitini vermektedir.

Öte yandan Aitken'in genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemine göre de μ ve σ'nın en iyi, doğrusal, sistematik hatasız tahmin edicileri ise

$$\hat{\mu} = \overline{Y} = \sum^{n} Y_i / n \tag{7}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{mV^{-1}Y}{m'V^{-1}m} \tag{8}$$

biçimindedir.

Shaphiro ve Wilk (6), formülü ile simgelenen regresyon doğrusunu göz önüne alarak normalliği saptayan W istatistiğini

$$W = \frac{R^4\hat{\sigma}^2}{C^2S^2} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{(a'Y)^2}{S^2} = \frac{\left(\sum^{n} a_i Y_i\right)^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} \tag{9}$$

olarak tanımlamışlardır[20].

$R^2 = m'V^{-1}m$ olup sıralanmış örnek birimleri ile sıralanmış normal istatistiklerin beklenen değerleri arasındaki korrelasyondur.

$C^2 = m'V^{-1}V^{-1}m$ biçiminde tanımlanan C^2 ise normale dönüştürme sabiti olarak adlandırılmaktadır.

$S^2 = \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$ *ise* $\left[\left(n-1\right)\sigma^2\right]$'nin simetrik ve sistematik hatasız bir tahmincisidir.

$b = \dfrac{R^2\hat{\sigma}}{C}$ olup normale dönüştürme sabiti C'ye bağlı olarak, Y_i 'lerin bağımlı değişken, (4)'de verilen m_i sıralanmış standart normal tahmin edicilerin beklenen değerlerinin de bağımsız değişken olduğu regresyonda eğimi vermektedir.

Örnek birimlerinin normal dağılan bir an kütleden çekilmesi halinde

$$W = \left(b^2 / S^2\right) \tag{10}$$

Formülündeki b^2 *ve* S^2 değerleri aynı olup her ikisi de σ^2'nin bir tahmincisidir. Böylece, normal dağılan bir ana kütle için $b^2 = S^2$ ve W=1 olup bu da W'nin maksimumunu, yani üst hududunu verecektir. Normal dağılmayan ana kütlelerde ise b^2 *ve* S^2'nin farklı sonuçlar vereceğine de değinilmelidir.

m'in $n \le 400$ için kesin değerleri Harter tarafından hesaplanmış olmasına [21] rağmen V kovaryans matrisi açısından durum farklılık göstermekteydi. Makalenin yayınlandığı 1965 yılına kadar V'nin elemanları ancak $n \le 20$ için hesaplanabilmişti [22]. Bu da en önemli kısıtı oluşturmaktaydı. Sorunun üstesinden gelebilmek için Shaphiro-Wilk (9) formülünde kullanılan a için

$$a = \frac{m'V^{-1}}{(m'V^{-1}V^{-1}m)^{1/2}} = \frac{m'V^{-1}}{C} \tag{11}$$

şeklinde bir tanımlama yaparak ($m'V^{-1}$) ifadesini $a^* = m'V^{-1}$ ile simgelemektedirler. Buna göre $C = a^{*'}a^*$ olmakta, $20 \le n \le 50$ için Harter Çizelgesindeki m_i değerleri kullanılarak (11) formülünün sonuçları

$$\hat{a}_i^* = 2m_i \qquad (2,\ldots,n-1) \tag{12}$$

$$\hat{a}_1^2 = \hat{a}_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\left(1/2\right)n\right)}{2^{1/2}\Gamma\left[\left(1/2\right)\left(n+1\right)\right]} \end{cases} \qquad \text{n} \le 20 \tag{13}$$

$$\hat{a}_1^2 = \hat{a}_n^2 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\left(1/2\right)(n+1)\right)}{2^{1/2}\Gamma\left[\left(1/2\right)n+1\right]} \end{cases} \qquad \text{n>20} \tag{14}$$

yaklaşımı ile elde edilmektedir [23].

Çizelge 10. Shaphiro-Wilk W Testi İçin $\left(a_{n-i+1}\right)$ Katsayıları

n/i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739	
2	-	.0000	.1677	.2413	.2806	.3031	.3164	.3244	.3291	
3	-	-	-	.0000	.0875	.1401	.1743	.1976	.2141	
4	-	-	-	-	-	.0000	.0561	.0947	.1224	
5	-	-	-	-	-	-	-	.0000	.0399	
n/i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.5601	.05475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886	0.4808	0.4734
2	.3315	.3325	.3325	.3318	.3306	.3290	.3273	.3253	.3232	.3211
3	.2260	.2347	.2412	.2460	.2495	.2521	.2540	.2553	.2561	.2565
4	.1429	.1586	.1707	.1802	.1878	.1939	.1988	.2027	.2059	.2085
5	.0695	.0922	.1099	.1240	.1353	.1447	.1524	.1587	.1641	.1686
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197	0.1271	0.1334
7	-	-	.0000	.0240	.0433	.0593	.0725	.0837	.0932	.1013
8	-	-	-	-	.0000	.0196	.0359	.0496	.0612	.0711
9	-	-	-	-	-	-	.0000	.0163	.0303	.0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	.0000	.0140
n/i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254
2	.3185	.3156	.3126	.3098	.3069	.3043	.3018	.2992	.2968	.2944
3	.2578	.2571	.2563	.2554	.2543	.2533	.2522	.2510	.2499	.2487
4	.2119	.2131	.2139	.2145	.2148	.2151	.2152	.2151	.2150	.2148
5	.1736	.1764	.1787	.1807	.1822	.1836	.1848	.1857	.1864	.1870
6	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630
7	.1092	.1150	.1201	.1245	.1283	.1316	.1346	.1372	.1395	.1415
8	.0804	.0878	.0941	.0997	.1046	.1089	.1128	.1162	.1192	.1219
9	.0530	.0618	.696	.0764	.0823	.0876	.0923	.0965	.1002	.1036
10	.0263	.0368	.0459	.0539	.0610	.0672	.0728	.0778	.0822	.0862
11	0.0000	0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697
12	-	-	.0000	.0107	.0200	.0284	.0358	.0424	.0483	.0537
13	-	-	-	-	.0000	.0094	.0178	.0253	.0320	.0381
14	-	-	-	-	-	-	.0000	.0084	.0159	.0227
15	-	-	-	-	-	-	-	-	.0000	.0076

n/i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964
2	.2921	.2898	.2876	.2854	.2834	.2813	.2794	.2774	.2755	.2737
3	.2475	.2463	.2451	.2439	.2427	.2415	.2403	.2391	.2380	.2368
4	.2145	.2141	.2137	.2132	.2127	.2121	.2116	.2110	.2104	.2098
5	.1874	.1878	.1880	.1882	.1883	.1883	.1883	.1881	.1880	.1878
6	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691
7	.1433	.1449	.1463	.1475	.1487	.1496	.1505	.1513	.1520	.1526
8	.1243	.1265	.1284	.1301	.1317	.1331	.1344	.1356	.1366	.1376
9	.1066	.1093	.1118	.1140	.1160	.1179	.1196	.1211	.1225	.1237
10	.0899	.0931	.0961	.0988	.1013	.1036	.1056	.1075	.1092	.1108
11	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986
12	.0585	.0629	.0669	.0706	.0739	.0770	.0798	.0824	.0848	.0870
13	.0435	.0485	.0530	.0572	.0610	.0645	.0677	.0706	.0733	.0759
14	.0289	.0344	.0395	.0441	.0484	.0523	.0559	.0592	.0622	.0651
15	.0144	.0206	.0262	.0314	.0361	.0404	.0444	.0481	.0515	.0546
16	0.0000	0.0068	0.0131	0.0187	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444
17	-	-	.0000	.0062	.0119	.0172	.0220	.0264	.0305	.0343
18	-	-	-	-	.0000	.0057	.0110	.0158	.0203	.0244
19	-	-	-	-	-	-	.0000	.0053	.0101	.0146
20	-	-	-	-	-	-	-	-	.0000	.0049

n/i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	.2719	.2701	.2684	.2667	.2651	.2635	.3620	.2604	.2589	.2574
3	.2357	.2345	.2334	.2323	.2313	.2302	.2291	.2281	.2271	.2260
4	.2091	.2085	.2078	.2072	.2065	.2058	.2052	.2045	.2038	.2032
5	.1876	.1874	.1871	.1868	.1865	.1862	.1859	.1855	.1851	.1847
6	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	.1531	.1535	.1539	.1542	.1545	.1548	.1550	.1551	.1553	.1554
8	.1384	.1392	.1398	.1405	.1410	.1415	.1420	.1423	.1427	.1430
9	.1249	.1259	.1269	.1278	.1286	.1293	.1300	.1306	.1312	.1317
10	.1123	.1136	.1149	.1160	.1170	.1180	.1189	.1197	.1205	.1212
11	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	.0891	.0909	.0927	.0943	.0959	.0972	.0986	.0998	.1010	.1020
13	.0782	.0804	.0824	.0842	.0860	.0876	.0892	.0906	.0919	.0932
14	.0677	.0701	.0724	.0745	.0765	.0783	.0801	.0817	.0832	.0846
15	.0575	.0602	.0628	.0651	.0673	.0694	.0713	.0731	.0748	.0764
16	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	.0379	.0411	.0442	.0471	.0497	.0522	.0546	.0568	.0588	.0608
18	.0283	.0318	.0352	.0383	.0412	.0439	.465	.0489	.0511	.0532
19	.0188	.0227	.0263	.0296	.0328	.0357	.0385	.0411	.0436	.0459
20	.0094	.0136	.0175	.0211	.0245	.0277	.0307	.0335	.0361	.0386
21	0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22	-	-	.0000	.0042	.0081	.0118	.0153	.0185	.0215	.0244
23	-	-	-	-	.0000	.0039	.0076	.0111	.0143	.0174
24	-	-	-	-	-	-	.0000	.0037	.0071	.0104
25	-	-	-	-	-	-	-	-	.0000	.0035

Kaynak: Shaphiro S.S. – Wilk M.B. ,” An Analysis of Variance Test for Normality”, Biometrika, 1965 (52),603-604.

Çizelge 10’dan aynı zamanda

$$na_1^2/(n-1) \qquad (15)$$

olarak verilen W'nin minumum değerleri de hesaplanabilir. Kısaca W test istatistiği

$\left[na_1^2/(n-1)\right] \le W \le 1$

arasında yer almaktadır.

Sonuç olarak, $2 \le n \le 50$ için H_0: ana kütle dağılımı Normal dağılıma uygundur şeklindeki hipoteze ilişkin W test istatistiğinin oluşturulmasında şu adımlar izlenmelidir:

a) Örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır: $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$

b) $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$ hesaplanır.

c) Örnek dağılımı çift hadli, n=2k, ise Çizelge 1'de verilen a_{n-i+1} ile

$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1}\left(X_{n-i+1} - X_i\right)$ hesaplanır. (16)

d) Buna karşın dağılım tek hadli, $n = 2k+1$ olduğu takdirde X_{k+1} medyan olup b'nin hesaplanmasında göz önüne alınmamaktadır, çünkü tek had $a_{k+1} = 0$ sonucuna yol açacağından, b bu kez

$b = a_n(X_n - X_1) + ... + a_{k+2}(X_{k+2} - X_k)$ (17)

olacaktır.

e) Nihayet $W = b^2 / S^2$ test istatistiği oluşturulacaktır.

f) Hesaplanan W test istatistiği α 'nın çeşitli değerlerine göre düzenlenmiş W_α kritik değerleri ile karşılaştırılır. Johnson'nun S_B yaklaşımına göre [24] hesaplanmış olan W_α değerleri Çizelge 11'de verilmektedir.

Çizelge 11. W'nin Kritik Değerleri

	α -Düzeyi								
n	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.98	0.99
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	.687	.707	.748	.792	.935	.987	.992	.996	.997
5	.686	.715	.762	.806	.927	.979	.986	.991	.993
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	.730	.760	.803	.838	.928	.972	.979	.985	.988
8	.749	.778	.818	.851	.932	.972	.978	.984	.987
9	.764	.791	.829	.859	.935	.972	.978	.984	.986
10	.781	.806	.842	.869	.938	.972	.978	.983	.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	.805	.828	.859	.883	.943	.973	.979	.984	.986
13	.814	.837	.866	.889	.945	.974	.979	.984	.986
14	.825	.846	.874	.895	.947	.975	.980	.984	.986
15	.835	.855	.881	.901	.950	.975	.980	.984	.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	.851	.869	.892	.910	.954	.977	.981	.985	.987
18	.858	.874	.897	.914	.956	.978	.982	.986	.988
19	.863	.879	.901	.917	.957	.978	.982	.986	.988
20	.868	.884	.905	.920	.959	.979	.983	.986	.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	.878	.892	.911	.926	.961	.980	.984	.987	.989
23	.881	.895	.914	.928	.962	.981	.984	.987	.989
24	.884	.898	.916	.930	.963	.981	.984	.987	.989
25	.888	.901	.918	.931	.964	.981	.985	.988	.989

26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	.894	.906	.923	.935	.965	.982	.985	.988	.990
28	.896	.908	.924	.936	.966	.982	.985	.988	.990
29	.898	.910	.926	.937	.966	.982	.985	.988	.990
30	.900	.912	.927	.939	.967	.983	.985	.988	.900
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	.904	.915	.930	.941	.968	.983	.986	.988	.990
33	.906	.917	.931	.942	.968	.983	.986	.989	.990
34	.908	.919	.933	.943	.969	.983	.986	.989	.990
35	.910	.920	.934	.944	.969	.984	.986	.989	.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	.914	.924	.936	.946	.970	.984	.987	.989	.990
38	.916	.925	.938	.947	.971	.984	.987	.989	.990
39	.917	.927	.939	.948	.971	.984	.987	.989	.991
40	.919	.928	.940	.949	.972	.985	.987	.989	.991
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	.922	.930	.942	.951	.972	.985	.987	.989	.991
43	.923	.932	.943	.951	.973	.985	.987	.990	.991
44	.924	.933	.944	.952	.973	.985	.987	.990	.991
45	.926	.934	.945	.953	.973	.985	.988	.990	.991
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
47	.928	.936	.946	.954	.974	.985	.988	.990	.991
48	.929	.937	.947	.954	.974	.985	.988	.990	.991
49	.929	.937	.947	.955	.974	.985	.988	.990	.991
50	.930	.938	.947	.955	.974	.985	.988	.990	.991

Kaynak: Shaphiro S.S.- Wilk M.B., "An Analysis of Variance Test for Normality", Biometrika,1965 (52), 606.

g) $W < W_{\alpha}$ için H_0 reddedilerek ana kütle birimleri için Normal dağılımın söz konusu olamayacağına karar verilecektir. Buna karşın $W < W_{\alpha}$ durumunda ise H_0 'ın reddi için bir neden bulunamamaktadır.

5. SHAPHIRO-WILK W TESTİNE İLİŞKİN UYGULAMALAR

Çizelge 12.

i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	21	9	23	17	29
2	23	10	29	18	26
3	33	11	24	19	46
4	32	12	32	20	27
5	37	13	24	21	36
6	40	14	46	22	38
7	37	15	32	23	28
8	29	16	17	24	33
				25	18

Kaynak: Genceli M., "Tek Değişkenli Dağılımlarda Normallik Testleri", Sigma ,YTÜ, Fen Bilimleri Dergisi, 2006/4, 75.

H_0 : Söz konusu rastlantısal örnek parametre değerleri bilinmeyen bir Normal dağılımdan çekilmiştir.
H_1 : Örnek, Normal dağılan bir ana kütleden çekilmemiştir.

$\sum X = 760 \qquad \bar{X} = 30,4 \qquad S^2 = \sum(X - \bar{X})^2 = 1432$

$n = 25$ tek hadli olduğundan b'yi hesaplamak için (17) formülü kullanılmış, bu amaçla da Çizelge 10 ' dan aşağıdaki a_{n-i+1} katsayıları göz önüne alınmıştır:

Çizelge 13. $n = 25$ için a Katsayıları

$a_{12} = 0,4450$	$a_{11} = 0,3069$	$a_{10} = 0,2543$	$a_9 = 0,2148$
$a_8 = 0,1822$	$a_7 = 0,1539$	$a_6 = 0,1283$	$a_5 = 0,1046$
$a_4 = 0,0823$	$a_3 = 0,0610$	$a_2 = 0,0403$	$a_1 = 0,0200$

$X_{13} = 29$ (Medyan)

Buna göre de b için

$$b = (46-17)(0,445) + (46-18)(0,3069) + (40-21)(0,2543)$$
$$+(38-23)(0,2148) + (37-23)(0,1822) + (37-24)(0,1539) + (36-24)(0,1283)$$
$$+(33-26)(0,1046) + (33-27)(0,0823) + (32-28)(0,0610) + (32-29)(0,0403)$$
$$+(32-29)(0,02) = 37,2939$$ sonucuna ulaşılarak

$b^2 = 1390,885 \quad S^2 = 1432 \quad$ W=1390,835/1432=0,9713 hesaplanmıştır.

Çizelge 11'de $m = 25$ için $W_{0,01} = 0,888$, $W_{0,05} = 0,918$, $W_{0,10} = 0,931$ verilmektedir. Tüm bu anlamlılık düzeylerinde $W_\alpha < W$ olduğundan H_0 'ın reddi için bir neden bulunmamaktadır. Nitekim Çizelge 14'de verilen SPSS çıktısı H_0 'ın ancak $\alpha = 0,73$ için reddedilebileceğini ortaya koymaktadır.

Çizelge 14. Çizelge 11 verileri için SPSS çıktısı

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
X	,092	25	,200*	,973	25	,730

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

İkinci bir uygulama olarak da gene 11 birimlik küçük bir örnek verilmiştir.

Çizelge 15.

Y	148	154	158	160	161	162	160	170	182	195	236

Çizelge 16. n=11 için SPSS Çıktısı

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Y	,259	11	,037	,789	11	,007

a. Lilliefors Significance Correction

Çizelge 17. n=11 için a katsayıları

$a_1 = 0,5601$	$a_2 = 0,3315$	$a_3 = 0,226$	$a_4 = 0,1429$	$a_5 = 0,0695$

$b = (236-148)(0,5601)+(195-154)(0,3315)+(182-158)(0,226)+(170-160)(0,1429)$

$+(166-161)(0,0695) = 70.0808$

$b = 70,0808$ $\quad$ $b^2 = 4911,3185$ $\quad$ $S^2 = \sum(Y-\bar{Y})^2 = 6226$

$W = (4911,3185)/6226 = 0,789$

n=11 için $W_{0,01} = 0,792$, $W_{0,05} = 0,850$ olup birinci uygulamadan farklı olarak $W < W_\alpha$ 'dır. Dolayısıyle de H_0 reddedilerek örnek birimlerinin Normal dağılan bir ana kütleden çekilmediği hükmü verilecektir. Bu durum Çizelge 16 'daki SPSS çıktısından da görülmektedir.

6. KOLMOGOROV–SMIRNOV, LILLIEFORS VE SHAPHIRO WILK TESTLERİ İÇİN GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Kolmogorov-Smirnov testi sürekli dağılımlarda özellikle küçük örnekler için Ki-Kare Normal Dağılıma Uygunluk Testi'ne kıyasla çok daha kesin sonuçlar vermektedir. Anılan test hernekadar İstatistik yazınında Normal dağılıma uygunluk testi olarak adlandırılmaktaysa da parametre değerlerinin H_0 'da veri olarak yer alması uygulamada bu testin işlevini ortadan kaldırmakta, Normal dağılımlarda μ ve /veya σ^2 parametre değerlerinin değişip değişmediğine kısıtlamaktadır. Dolayısıyla da test uygulamada Lilliefors Testi ile ikame edilmektedir. Nitekim paket programlarında da Kolmogorov-Smirnov Testi değil Lilliefors Testi yer almaktadır.

Shaphiro-Wilk Testi'nin iki zaafına değinilmelidir. En iyi "omnibus" testi olarak kabul görmesine rağmen W'nin hesaplanmasındaki bağıl güçlük te söz konusudur. Ancak testin önerildiği 1965 yılından bugüne kadar bilgisayar teknolojisinde çok yol katedildiğinden günümüzde bu bir sorun olmaktan çıkmıştır.

İkinci zaaf ise testin azami 50 birimlik örneklere uygulanabilmesidir. Bu durum ise yeni arayışlara neden olmuştur. D'Agostino'nun Y, Shaphiro-Francia'nın W, Fılıpen'in ζ ve

Royston'un Normal dağılıma dönüştürülmüş W' istatistikleri bu kapsamda sayılabilir. Listeye ayrıca Rahman ve Govindarajulu'nun değiştirilmiş Shaphiro-Wilk istatistiği $\tilde{W}$ de eklenebilir.

Yazıda Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Shaphiro-Wilk Normallik testlerinin Türkçe İstatistik yazınına tanıtılması amaçlanmıştır. Dolayısıyla Shaphiro-Wilk Testi'nin uzantıları irdelenmeyecektir.

Son olarak, günümüzde, Shaphiro-Wilk Testin'nin $n > 50$ için de uygulandığını göstermek açısından 90 birimlik bir örnek için Lilliefors ve Shaphiro-Wilk çıktılarına yer verilmiştir.

Çizelge 18.

i	Z_i	i	Z_i	i	Z_i
1	358	31	279	61	328
2	346	32	345	62	245
3	374	33	300	63	353
4	328	34	324	64	228
5	279	35	318	65	384
6	278	36	328	66	434
7	359	37	307	67	458
8	285	38	293	68	379
9	317	39	443	69	239
10	392	40	302	70	302
11	276	41	361	71	209
12	333	42	290	72	419
13	341	43	336	73	237
14	244	44	355	74	333
15	335	45	378	75	354
16	397	46	308	76	410
17	303	47	330	77	250
18	322	48	489	78	349
19	368	49	320	79	316
20	299	50	301	80	246
21	334	51	352	81	344
22	374	52	352	82	317
23	353	53	271	83	389
24	342	54	368	84	366
25	394	55	235	85	264
26	314	56	376	86	230
27	386	57	401	87	315
28	324	58	453	88	285
29	284	59	402	89	272
30	364	60	358	90	355

Çizelge 19. n=90 veri için SPSS çıktıları

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Z	,040	90	,200*	,990	90	,747

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Çizelge 18'deki verilerin sonuçlarına göre %95 anlamlılık düzeyinde,

$$d_{mak} = 0,04 < d_{0,05} = \frac{0,886}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{0,886}{9,49} = 0,093 \text{ olmasından ötürü}$$

H_0 : 90 birimlik örnek normal dağılan bir ana kütleden çekilmiştir şeklindeki H_0 hipotezi Lilliefors'a göre reddedilememektedir. S-W Testin'de de W=0,99 olup ancak %25 (1-0,747=0,253) hata düzeyinde reddedilebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Normal dağılım için çarpıklık ve basıklık testleri, bkz: Genceli, M., Tek Değişkenli Dağılımlarda Normallik Testleri", YTÜ, Sigma Dergisi, 2006/4, 69-91.
Ayrıca Jarque-Bera Normallik testi ve bu teste ilişkin eleştiriler için bkz: Genceli, M., "İstatistik ve Ekonometri İlkeleri", Filiz Kitapevi, İstanbul, 2001, 252-256.
Kolmogorov-Smirnov Teorik Dağılıma Uygunluk Testi için bkz: Orhunbilge , N., "Örneklem Yöntemleri ve Hipotez Testleri", Avcıol Basım Yayın, İstanbul,2000,281-284. Burada Normal dağılıma uygunluk ele alınmayıp Kolmogorov-Smirnov testi ile Poisson ve Binom dağılımlarına uygunluk irdelenmiştir. Uygulamalarına ilişkin eleştirilerim yazı akışı içinde ve 17. dipnotta yer almaktadır.

[2] Normallik testlerine yer veren öncü kitaplar daha ziyade İngiliz istatistikçilere ilişkindir. Örneğin Snedecor George, W., " Statistical Methods", Iowa State College Pres, Ames, Iowa,1946
Fisher, R.A., "Statistical Methods for Reseach Workers", Oliver and Boyd, London,1950 ve George W., and Cochran William, G., " Statistical Methods", The Iowa State University Pres, Ames,1967
Pearson ve Fisher ölçülerine yer vermişlerdir. Lawrence L, L., "Statistics for Modern Business Decisions", Harcourt Brace, New York,1974 ve Bleymüller Joseph, Gehlert Günther, Gülicher Herbert, "Statistik für Wirtschaftswissenschaften", Verlag Vahlen, München,1979 da Kolmogorov- Smirnov Normallik testini ele almışlardır.
Günümüzde ise çeşitli normallik testlerini açıklayan birçok kitap söz konusudur.
Örneğin Thode Henry C.J., " Testing for Normality", Marcel Dekker, New York,2002. Bu monografide tüm testler ayrıntılı olarak irdelenmektedir. Sachs,L., "Angewandte Statistik, Springer Verlag, 2004. Burada Pearson, Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors ölçüleri anlatılmaktadır. Panik Michael, J., "Advenced Statistics form an Elemantary Point of View", Elsevier, New York, 2005. Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Shaphiro-Wilk Testleri kapsama alınmıştır. Ayrıca Spiegel Murray –Stephens Larry J., "Statistics",

Series, 1999'dan Çev.:Alptekin Esin ve Salih Çelebioğlu, Nobel, Ankara,2003. Ryan-Joiner Normallik Testine ilişkin uygulama bulunmaktadır.
[3] Shaphiro S.S.- Wilk M.B., "An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)", Biometrika,52:1965,591-611.
[4] Anderson T.W.- Darling D.A. , "A Test for Goodness of Fit", Jasa, 49,(1954),765-769.
[5] Shaphiro S.S.- Francia R.S., " An Approximate Analysis of Variance test for Normality" Jasa, 67, (1972), 215-216.
[6] Epps T.W.- Pulley L.B., " A Test for Normality Based on the Empirical Characteristic Function", Biometrika :70,(1983),723-26.
[7] Yeterli birime sahip bir örneğin herhangi bir biçimde normallikten sapmasını ortaya koyan testler "omnibus test" olarak adlandırılmaktadır.
[8] Panik Michael J., " Advanced Statistics from an Elementary Point of View,", Elsevier, New York, 2005, 623.
[9] Darling D.A., "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises Tests", The Annals of Mathematical Statistics 28 (1957), 824.
[10] Panik Michael J., " Advanced Statistics from an Elementary Point of View,", Elsevier, New York, 2005, 626.
Darling D.A., "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises Tests", The Annals of Mathematical Statistics 28 (1957), 825.
[11] Panik Michael J., " Advanced Statistics from an Elementary Point of View,", Elsevier, New York, 2005, 627.
[12] Darling D.A., "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises Tests", The Annals of Mathematical Statistics, 28 (1957), 826.
[13] Massey Frank J.Jr., "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit", Jasa, 46 (1951), 70.
[14] Miller Leslie H., " Table of Percentage Points of Kolmogorov-Smirnov Statistics", Jasa,51 (1956), 115.
[15] Bu bağlamda Orhunbilge'nin uygulamaları örnek verilebilir.
[16] Panik Michael J., " Advanced Statistics from an Elementary Point of View,", Elsevier, New York, 2005, 630.
[17] Bu öneri süreksiz dağılımlar için Kolmogorov-Smirnov Testi'nin kesinlikle kullanılamaması şeklinde algılanmamalıdır.
Ancak böyle bir uygulamada Çizelge 1'de verilen kritik değerlerin kullanılması konservatif bir test ile karşı karşıya kalınmasına yol açmaktadır. Bunun sonucu olarak ta çoğu zaman H_0 reddedilememektedir. Nitekim Orhunbilge'de de bu durum meydana gelmiştir. Kolmogorov- Smirnov Testi'nin süreksiz dağılımlara uygulanması için bkz: Conover W.J., " A Kolmogorov-Goodness-of-fit Test for Discontinous Distributions", Jasa,67,(1972), 591-596 ve Horn Dadakis Susan, "Goodness-of-Fit Tests for Discrete Data: A Review and an Health Impairment Scale", Biometrics 33, (1977), 237-247.
[19] Shaphiro S.S., and Wilk M.B., " An Analysis Of Variance Test For Normality (complete samples)", Biometrika 52, (1965), 592.
[20] Shaphiro S.S., and Wilk M.B., " An Analysis Of Variance Test For Normality (complete samples)", Biometrika 52, (1965), 592.
[21] Harter H.L., "Expected Vaues of Normal Order Statistics", Biometrika 48, (1961),151-165.
[22] Sarhan A.E.- Greenberg B.G., " Estimation of Location and Scale Parameters by Order Statistics From Single and Double Censored Samples", Part I, Ann Math. Statist., 27 (1956),427-451.
[23] Shaphiro S.S., and Wilk M.B., " An Analysis of Variance Test For Normality (complete samples)", Biometrika 52, (1965), 596.

[24] Johnson N.L., “Systems Of Frequency Curves Generated By Methods Of Transition”, Biometrika, 36 (1949), 149-176.