σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma 26
267-280,
2008

Araştırma Makalesi / Research Article

ON ZETA AND L-FUNCTIONS OVER QUADRATIC NUMBER FIELDS

Bülent KÖKLÜCE*

Fatih Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Büyükçekmece-İSTANBUL

Geliş/Received: 23.06.2008 Kabul/Accepted: 09.01.2009

ABSTRACT

In this study firstly, the definition and a short history of the zeta and L-functions are given. Then, the zeta and L-functions of number fields are introduced. The L-functions of quadratic number fields are considered as a special case. The Dirichlet characters of some quadratic numbers fields are computed and the corresponding $L(1,\chi)$ function values are obtained. The strong relationship between the values of L-functions and the class number of the quadratic number fields is discussed, some results are obtained, and examples are given. The PARI software is used in calculations and preparation of the tables.
Keywords: Zeta-functions, Dirichlet characters, L-functions, Quadratic number fields, fundamental unit, class number.
MSC numbers/numaraları: 11R11,11R42.

KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN ZETA VE L-FONKSİYONLARI ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle, zeta ve L-fonksiyonlarının tanımı ve kısaca tarihsel gelişimi verildi. Daha sonra, sayı cisimlerinin zeta ve L-fonksiyonları tanıtıldı. Özel olarak, kuadratik sayı cisimlerinin L-fonksiyonları ele alındı. Bazı kuadratik sayı cisimlerinin Dirichlet karakterleri hesaplanıp bunlara karşılık gelen $L(1,\chi)$ değerleri elde edildi. L-fonksiyonlarının değerleri ile kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayıları arasındaki bağlantı üzerinde duruldu, bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edildi ve örnekler çözüldü. Çalışmada yapılan hesaplamalarda ve kullanılan tabloların hazırlanmasında cebirsel sayılar teorisi paketi içeren PARI-yazılımı kullanılmıştır.
Anahtar Sözcükler: Zeta fonksiyonları, Dirichlet karakterleri, L-fonksiyonları, Kuadratik sayı cisimleri, temel birim, sınıf sayısı.

1. GİRİŞ

Tanım 1.1. Riemann zeta fonksiyonu,

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}... \qquad (1.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

* e-mail / e-ileti: bkokluce@fatih.edu.tr, tel: (212) 866 33 00 / 2088

Riemann'ın 19. yüzyılda bu fonksiyon üzerinde öncü çalışmalarından ötürü, fonksiyon onun adıyla anılmaktadır. Aslında fonksiyon üzerinde ilk çalışmaların tarihi daha da geriye gitmektedir. 1650 yılında İtalyan matematikçi Pietro Mengoli serilerin toplamı hakkında bir kitap yayınlamıştır. Bu kitabında $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$ toplamına dikkat çekmiştir. Euler de, $\zeta(2)$ 'in değerini sayısal olarak elde edebilme uğraşları sonucunda Euler-Maclaurin toplam formülünü elde etmiştir. Onun bu çalışması sayısal analizle sayılar teorisinin ilk bağlantılarını ortaya çıkarmıştır. Euler 1735 yılında $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$, formülünü elde etmişir. Yıllarca üzerinde uğraştığı bu sonlu toplamın π ile bağlantılı çıkması onu oldukça şaşırtmıştır. Yine Euler, $\zeta(4)$ ve $\zeta(6)$ 'nın değerlerinin sırasıyla $\frac{\pi^4}{90},\frac{\pi^6}{945}$ olduğunu göstermiştir.

Tanım 1.2. χ bir Dirichlet karakteri olmak üzere $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ fonksiyonu (χ 'ye göre) *Dirichlet L fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Eğer $\chi(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^x=\{1 \bmod 4, 3 \bmod 4\}\to \mathbb{C}^x$ Dirichlet karakterini $\chi(1 \bmod 4)=1, \chi(3 \bmod 4)=-1$, biçiminde alırsak bu karaktere gore Dirichlet L-fonksiyonu,

$$L(1,\chi)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+... \tag{1.2}$$

toplamı biçimindedir. Leibniz bu serinin yakınsadığı değeri hesaplamak için epeyce uğraşmış ve sonuç olarak $\frac{\pi}{4}$ 'e eşit olduğunu göstermiştir. Bu sonuçtan oldukça etkilenen Leibniz doğanın gizemini çözdüğüne inanmıştır, hatta bu buluşundan sonra avukat ve bir diplomat olma hevesini bir yana bırakıp matematikle uğraşmaya karar verdiği söylenir. Aslında Leibniz'in 1673'te elde ettiği ve adıyla anılan formül ondan epey önce 1400'lü yıllarda Hint matematikçi Madlava ve kendisinden çok kısa bir sure önce de Gregory tarafından elde edilmiştir. Dirichlet, bu fonksiyonları $ebob(a,p)=1$ olmak üzere $a, a+p, a+2p,...$ aritmetik ilerleyişinde(arithmetic progression) sonsuz sayıda asal sayı olduğunu ispatlamada kullanmıştır.

Tanım 1.3. $f(s)$, $s>r$ için tanımlı bir fonksiyon ve $\lim_{s\to r^+} f(s)=\infty$ olmak üzere eğer $\lim_{s\to r^+}(s-r)f(s)$ limiti mevcut ve sıfırdan farklı ise $f(s)$, $s=r$ 'de *basit bir kutuba* sahiptir denir ve bu limite de f 'nin $s=r$ de *rezidüsü* adı verilir.

$s>1$ olmak üzere $\zeta(s)$ yakınsaktır ve $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta(s)=1$ 'dir. Yani Riemann zeta fonksiyonu $s=1$ 'de 1 rezidüsü ile basit bir kutuba sahiptir.

Asal sayıların dağılımı ve Riemann zeta fonksiyonu $\zeta(s)$ 'in sıfırları arasındaki bağlantıyı ilk olarak Riemann farketmiştir. Euler'in yukarıda sözü edilen, zeta fonksiyonunun teorisine katkıları, hep kapalı-form toplamlar üzerinedir. Onun belki de en önemli katkısı aslında zeta fonksiyonunun sayılar teorisiyle olan bağlantısını ortaya çıkarmasıdır. Nitekim Euler, 1737 yılında Zeta fonksiyonunu asal sayılarla ilişkilendiren

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s})} \tag{1.3}$$

biçimindeki çarpım formülünü elde etmiştir [1]. Burada sağ taraftaki çarpım bütün asal sayılar üzerindedir. Bu formülün izahı zor değildir. Burada p asal sayı ve $s>0$ ise $p^{-s}<1$ olduğu açıktır, dolayısıyla;

$$(1-p^{-s})^{-1}=1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+... \quad (1.4)$$

yazabiliriz. Eğer sadece $p=2$ ve $p=3$ 'ü hesaba katarak bu değerleri (1.4)'te yerine yazıp çarpımlar alınırsa

$$\begin{aligned}(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}&=(1+2^{-s}+4^{-s}+8^{-s}+...).(1+3^{-s}+9^{-s}+27^{-s}+...)\\&=1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+8^{-s}+9^{-s}+12^{-s}+16^{-s}+...\end{aligned} \quad (1.5)$$

elde ederiz. Bu toplam eksik terimlerine rağmen (1.1)'deki toplama oldukça benzemektedir. Dikkat edilirse (1.5)'te iki ve üç ile bölünebilen bütün pozitif n 'ler için n^{-s} ' ler mevcuttur. Eğer çarpıma $(1-5^{-s})^{-1}$ 'i de eklersek o zaman beş ile bölünebilen bütün pozitif n 'ler için de n^{-s} terimleri toplamda yer alacaktır. Bu prosedürü bütün asal sayılar için işletirsek hiçbir terimi atlamamış oluruz ki bu durumda;

$$\prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})}=\frac{1}{(1-2^{-s})}.\frac{1}{(1-3^{-s})}.\frac{1}{(1-5^{-s})}\cdots=1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

sonucunu elde ederiz.

Asal sayıları $p=2,\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\ p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ biçiminde sınıflandırarak Euler çarpımını;

$$\zeta(s)=\prod(1-p^{-s})^{-1}=(1-2^{-s})\prod_{p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)}(1-p^{-s})^{-1}$$

biçiminde de yazabiliriz.

Bu formül $\zeta(s)$ 'in asal sayıların dağılımlarını belirlemedeki rolünü açıkça göstermektedir. Buradaki çarpım formülü Euler'in, asal sayıların bütününün çarpımsal terslerinin toplamının yakınsaklığını test etmesini sağlamıştır. Sözü edilen çalışmalara rağmen ne Euler, ne de bir sonraki yüzyılda onun çalışmalarını sürdüren matematikçiler $\zeta(s)$ 'in analitik bir fonksiyon gibi davranışına değinmemişlerdir. $\zeta(s)$ 'in analitik bir fonksiyon gibi davranışının önemine ilk olarak Riemann tarafından işaret edilmiştir. Denklem (1.3), $\mathrm{Re}(s)>1$ için uygulanır ve $\zeta(s)$ 'in burada analitik olduğunu gösterir. Riemann, $\zeta(s)$ 'in birinci dereceden bir kutbunun olduğu $s=1$ hariç analitik olarak bütün kompleks düzleme sürdürülebileceğini göstermiştir. Rieman, $\zeta(s)$ 'in sıfırlarının asalların dağılımını belirlediğini gözlemlemiştir. Onun, asal sayılar ve $\zeta(s)$ 'in sıfırları arasındaki bağlantısına dair geliştirdiği formülleri ancak 1890'larda Hadamard ve Weierstrass tarafından gerekli analitik gereçler geliştirildikten sonra ispatlanabilmiştir.

2. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN ZETA VE L-FONKSİYONLARI

Bilindiği üzere, $\mathbb{Q}$ 'nun sonlu genişlemeleri sayı cismi, özel olarak ikinci dereceden genişlemeleri de kuadratik sayı cismi diye isimlendirilir. Kuadratik sayı cisimleri, d kare-bağımsız bir tamsayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ biçimidedirler. Eğer $d>0$ ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 'yi reel, $d<0$ ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 'yi sanal kuadratik sayı cismi diye isimlendirerek ayırt ederiz. Her iki tür sayı cisminde çalışma da Gauss'un tanıttığı $ax^2+bxy+cy^2$: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ biçimindeki ikili kuadratik formların teorisiyle oldukça yakından bağlantılıdır.

K sayı cismindeki monik, tamsayı katsayılı bir polinomun kökü olan sayılar (cebirsel tamsayılar) bir halka oluşturur, bu halkaya K 'nın tamlık halkası adı verilir ve O_K ile gösterilir.

O_K 'da tersi olan elemanların oluşturduğu grup U_K birim grubu şeklinde isimlendirilir. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin birim grubu $d<0$ iken sonlu, $d>0$ olduğunda ise sonsuz devirli bir gruptur. Reel kuadratik sayı cisimlerinde bu sonlu devirli grubun üreteci temel birimsel diye adlandırılır ve ε_K ile gösterilir. O_K 'nın bütün ideallerinin kümesi, idealler arası tanımlanan çarpma işlemi altında bir yarı-grup oluşturur. Bu yarı grubu gruba çevirmek için kesirsel idealleri hesaba katmak gereklidir. K 'nın bütün kesirsel ideallerinin grubu $\mathfrak{F}$, O_K 'nın idealleri tarafından üretilen serbest değişmeli bir gruptur. $\mathfrak{F}$ 'nin bütün temel kesirsel idealleri onun bir $\mathfrak{P}$ alt grubunu oluşturur. $\mathfrak{F}/\mathfrak{P}$ bölüm grubu K sayı cisminin sınıf grubu diye adlandırılır ve $\mathrm{Cl}=\mathrm{Cl}(O_K)$ biçiminde gösterilir. Minkowsky teoremi bu grubun eleman sayısının sonlu olduğunu belirtir. Bu sonlu grubun derecesi K 'nın sınıf sayısı olarak isimlendirilir ve h_K ile gösterilir.

Tanım 2.1. K, bir sayı cismi ve O_K 'da bu sayı cisminin tamlık halkası olmak üzere K 'nın *zeta fonksiyonu;*

$$\zeta_K(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada belirtilen toplam $\mathfrak{a}\subset O_K$ olan bütün idealler üzerindedir. $N(\mathfrak{a})$, fonksiyonu $\mathfrak{a}$ idealinin normunu belirmektedir.

Özel olarak eğer $K=\mathbb{Q}$ alınırsa Tanım 1.1. ile verilen Riemann zeta fonksiyonu elde edileceği açıktır. Bu çalışmada bazı tanım ve teoremler genel olarak sayı cisimleri için verilse de esas olarak kuadratik sayı cisimlerinin zeta ve L-fonksiyonları ele alınmıştır. Euler çarpım formülü sayı cisimleri hesaba katıldığında aşağıdaki hali alır.

Teorem 2.1. $\zeta_K(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}}$ (2.2)

tir. (Burada çarpım $\mathfrak{p}\subset O_K$ olan bütün asal idealler üzerindedir).

İspat: $\zeta_K(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(N(\mathfrak{p}))^{ns}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-(N(\mathfrak{p}))^{-s}}$ elde edilir.

$f(x)$, α 'nın minimal polinomu olmak üzere $f(x)$ polinomunun $\bmod p$ 'ye göre indirgenemez polinomların çarpımı olarak yazılışı $f(x)=\prod_{i=1}^{r}f_i(x)^{e_i} \pmod p$ biçiminde ise (p) idealinin asal ideallerin çarpımı olarak yazılımı $(p)=\prod_{i=1}^{r}(p,f_i(\alpha))^{e_i}$ biçimindedir.

Tanım 2.2. $f(x)=\prod_{i=1}^{r}f_i(x)^{e_i} \pmod p$, $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 'in modulo p 'ye göre indirgenemez polinomların çarpımı olarak yazılışı olmak üzere f 'nin $\bmod p$ 'ye göre Euler çarpımı

$$A_{f,p}(t)=\prod_{i=1}^{r}1-t^{der(f_i)}$$

polinomu biçiminde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3. $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ polinomunun *zeta fonksiyonu,*

$$\zeta_f(s)=\prod_{p}A_{f,p}(p^{-s})^{-1}$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.2. K bir sayı cismi ve $O_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, K 'nın tamlık halkası olsun. $f(x)$, α 'nın minimal polinomunu göstermek üzere;

$\zeta_K(s) = \zeta_f(s)$

eşitliği vardır.

İspat: (2.2) eşitliğiyle $\zeta_K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-(N(\mathfrak{p}))^{-s}} = \prod_{p\in Z}\prod_{\mathfrak{p}|(p)} \frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}}$

elde ederiz. $f(x) = \prod_{i=1}^{r} f_i(x)^{e_i}$ (mod p) $\Rightarrow \prod_{\mathfrak{p}|(p)} \frac{1}{1-(N(\mathfrak{p}))^{-s}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-\left(p^{\deg f_i}\right)^{-s}} = \frac{1}{A_{f,p}(p^{-s})}$

$\Rightarrow \zeta_K(s) = \prod_{p\in Z} \frac{1}{A_{f,p}(p^{-s})} = \zeta_f(s)$.

Teorem 2.3. $s > 1$ olmak üzere $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$ 'dir.

İspat:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \prod_{(\frac{d_K}{p})=1} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_{(\frac{d_K}{p})=-1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2} \prod_{p|d_K}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= \prod_{(\frac{d_K}{p})=1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{(\frac{d_K}{p})=-1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2} \prod_{p|d_K}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= \left[\prod_{(\frac{d_K}{p})=1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{(\frac{d_K}{p})=-1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|d_K}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right]\left[\prod_{(\frac{d_K}{p})=1} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{(\frac{d_K}{p})=-1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|d_K} 1\right]$$

Bu son eşitlikte birinci köşeli parantezle belirtilen çarpanı $\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ biçiminde tek bir çarpanla ifade edebiliriz ki bu da $\zeta(s)$ 'e eşittir. Diğer yandan

$$\left[\prod_{(\frac{d_K}{p})=1} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{(\frac{d_K}{p})=-1} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|d_K} 1\right] = \prod_p \left(1-\frac{\left(\frac{d_K}{p}\right)}{p^s}\right)^{-1}$$

dir. O halde

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)\prod_p \left(1-\frac{\left(\frac{d_K}{p}\right)}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{d_K}{p}\right)}{n^s} = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s,\chi)$$

elde edilir.

Teorem 2.4. $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = L(1,\chi)$ 'dır.

İspat: $\chi(n)$, $\bmod|d_K|$ Dirichlet karakteri olmak üzere $s>0$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ serisi koşullu yakınsaktır ve $s>0$ için s 'nin bir fonksiyonunu belirtir. $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta(s)=1$ eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\lim_{s\to 1^+}(s-1)\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}=\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=L(1,\chi)$$

elde edilir.

Örnek 2.1. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ kuadratik sayı cismi için $d=21\Rightarrow d_K=21$ 'dir, dolayısıyla $\bmod|d_K|$ Dirichlet karakteri [4] χ 'yi göz önüne aldığımızda;

$$L(1,\chi)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{21k+1}-\frac{1}{21k+2}+\frac{1}{21k+4}+\frac{1}{21k+5}-\frac{1}{21k+8}-\frac{1}{21k+10}-\frac{1}{21k+11}-\frac{1}{21k+13}+\frac{1}{21k+16}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{21k+17}-\frac{1}{21k+19}+\frac{1}{21k+20}\right)$$

$$=\int_0^1(1-x+x^3+x^4-x^7-x^9-x^{10}-x^{12}+x^{15}+x^{16}-x^{18}+x^{19}+\ldots)dx$$

$$=\int_0^1(1-x+x^3+x^4-x^7-x^9-x^{10}-x^{12}+x^{15}+x^{16}-x^{18}+x^{19})(1+x^{21}+x^{42}+\ldots)dx$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x+x^3+x^4-x^7-x^9-x^{10}-x^{12}+x^{15}+x^{16}-x^{18}+x^{19})dx}{1-x^{21}}$$

$$=\int_0^1\frac{(x^2-1)(x^8-2x^7+2x^6+2x^2-2x+1)}{x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1}dx=0.683807\ldots$$

elde edilir.

$L(1,\chi)$ ile sonraki integral arasındaki bu bağlantıyı genelleştirmek mümkündür. Dirichlet karakterlerinin periyodik olduklarını göz önünde bulundurduğumuzda $L(1,\chi)$ 'deki terimleri $\bmod(\varphi(|d_K|))$ 'ya göre gruplandırabiliriz. Şöyle ki; bu integralin içinde her zaman iki çarpan bulunacaktır. Bunlardan birinci çarpan;

$$f_{d_K}(x)=1+x^1\left(\frac{d_K}{2}\right)+x^2\left(\frac{d_K}{3}\right)+\ldots+x^{d_K-1}\left(\frac{d_K}{|d_K|}\right)=\sum_{t=1}^{|d_K|}x^{t-1}\left(\frac{d_K}{t}\right) \tag{2.3}$$

biçimindedir. Diğeri ise her zaman,

$$1+x^{|d_K|}+x^{2|d_K|}+x^{3|d_K|}+\ldots \tag{2.4}$$

sonsuz toplamına eşit olur ki bu da $\frac{1}{1-x^{|d_K|}}$ 'ya eşittir. O halde bu sonucu (2.3) ile birleştirdiğimizde sonuç olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.5. $f_{d_K}(x)=\sum_{t=1}^{|d_K|}x^{t-1}\left(\frac{d_K}{t}\right)$ olmak üzere,

$$L(1,\chi)=\int_0^1 \frac{f_{d_K}(x)dx}{1-x^{|d_K|}}. \tag{2.5}$$

$L(1,\chi)$ fonksiyonlarının değerlerinin hesaplanması, sınıf sayılarıyla olan bağlantısından ötürü oldukça önemlidir. İlgili Dirichlet karakteri için bu fonksiyonun değerleri biliniyorsa buna karşılık gelen kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı, ve tersine kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı biliniyorsa $L(1,\chi)$ 'nın değeri hesaplanabilir.

Teorem 2.6 [2]**.** $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir sanal kuadratik sayı cismi ve $d\equiv 2,3(\bmod 4)$ olsun. Bu durumda;

$$L(1,\chi)=\frac{h\pi}{2\sqrt{|d|}} \tag{2.6}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{a}$ idealinin herhangi iki denklik sınıfı üzerinde $\sum\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$ 'ların toplamları aynıdır. Buna göre farklı denklik sınıflarının sayısını h olarak alırsak,

$$\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=h\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{\mathfrak{a}\text{ temel ideal}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

elde edilir. Sanal kuadratik sayı cisimlerinde birimseller grubu sonludur ve $d=-1$ için O_K 'nın birimselleri $\pm 1,\pm i$, diğer $d<0$, $d\equiv 2,3(\bmod 4)$ içinse birimseller ± 1 'den ibarettir. Bu durumda genel kullanıma uyarak birimsellerin sayısını w ile gösterirsek;

$$\sum_{\mathfrak{a}\text{ temel ideal}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\frac{1}{w}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(x^2-dy^2\right)$$

elde ederiz. $s\to 1^+$ iken $\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(x^2-dy^2\right)$ toplamı $\iint_{x^2-dy^2\geq 1}(x^2-dy^2)^{-s}dxdy$ integrali ile aynı şekilde sonsuza yaklaşır. Bu ikisi arasındaki fark $s\to 1^+$ iken sınırlı kalır. Bu integrali değişken değiştirme yöntemiyle hesaplamak mümkündür.

$$\iint_{x^2-dy^2\geq 1}(x^2-dy^2)^{-s}dxdy=\iint_{-dz^2-dy^2\geq 1}(-dz^2-dy^2)^{-s}d(\sqrt{-d}\,z)dy$$

$$=|d|^{-s}|d|^{1/2}\iint_{z^2+y^2\geq |d|^{-1}}(z^2+y^2)^{-s}dzdy$$

$$=|d|^{(1-2s)/2}\iint_{r^2\geq |d|^{-1}}r^{-2s}rdrd\theta$$

$$=|d|^{(1-2s)/2}2\pi\left.\frac{r^{2-2s}}{2-2s}\right|_{|d|^{-1/2}}^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{s-1}.|d|^{(1-2s)/2}|d|^{s-1}.$$

Bunu üstteki denklemde yerine koyarsak,

$$\lim_{s\to 1^+}(s-1)\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\lim_{s\to 1^+}(s-1)\frac{\pi}{s-1}h\frac{1}{w}|d|^{(1-2s)/2}|d|^{s-1}=h\frac{1}{w}\pi|d|^{-1/2}=\frac{h\pi}{w\sqrt{|d|}}$$

elde edilir. Yani;

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\frac{h\pi}{w\sqrt{|d|}}$$

dir[1]. Bu sonuç sadece $d<0,\ d\equiv 2,3(\bmod 4)$ olan sanal kuadratik sayı cisimleri içindir. Diğer kare-bağımsız d değerlerine karşılık gelen kuadratik sayı cisimleri için de benzer formüller mevcuttur.

Örnek 2.2. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$ sanal kuadratik sayı cismini hesaba katalım. Bilindiği üzere $O_K=\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]$, $w=2, |d_K|=52$ ve $h=2$, 'dir. Dolayısıyla $\dfrac{2\pi}{2\sqrt{|-13|}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{13}}=L(1,\chi)$'dir.

Dirichlet karakterlerini $\bmod 52$ göre hesapladığımızda bunların sırasıyla, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0,-1, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0 olduğunu görürüz. Bunun sonucu olarak,

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-52}{n}\right)\frac{1}{n}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}$$
$$+\frac{1}{31}-\frac{1}{33}-\frac{1}{35}-\frac{1}{37}-\frac{1}{41}-\frac{1}{43}-\frac{1}{45}+\frac{1}{47}+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}+\ldots$$

seri toplamının $\dfrac{\pi}{\sqrt{13}}$ e eşit olduğunu görürüz.

Teorem 2.7. [3] [Dirichlet Sınıf Sayı Formülü] $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, kuadratik sayı cismini belirtmek üzere;

$$L(1,\chi)=\begin{cases}\dfrac{2\pi h}{w\sqrt{|d_K|}} & d<0\\[2ex] \dfrac{2hR}{\sqrt{d_K}} & d>0\end{cases}\tag{2.7}$$

eşitliği vardır.

Özel olarak eğer, $d\equiv 2,3(\bmod 4)$ ise $\sqrt{|d_K|}=\sqrt{|4d|}=2\sqrt{|d|}$ olacağı için $d<0$ olduğunda Teorem 2.6'da elde edilen sonuca varılır. Dirichlet sınıf sayı formülünün sonucu olarak, O_K'nın sınıf sayısını biliniyorsa O_K'ya karşılık gelen Dirichlet karakteri $\chi(n)$ için $L(1,\chi)$ rahatlıkla hesaplanabilir. Benzer şekilde, eğer $L(1,\chi)$ biliniyorsa sınıf sayısı h hesaplanabilir. Sınıf sayılarıyla olan bu güçlü bağlantısından ötürü L-fonksiyonlarının ve özellikle de $L(1,\chi)$ değerlerinin hesaplanması cebirsel sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Örnek 2.3. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{57})$ 'yi göz önüne alalım. Bu durumda $O_K=\mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}\right]$, $|d_K|=57$ 'dir.

Çizelge 2.3 ve 2.5'ten $R=\log\varepsilon_K=\log(131+40\omega)=5.710416$ olduğunu görüyoruz. Yine Çizelge 3.4'ten $h=1$ olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla (2.7) kullanıldığında $L(1,\chi)=\dfrac{2\log(131+40\omega)}{\sqrt{57}}=\dfrac{2(5.710416)}{\sqrt{57}}=1.512726\ldots$'dır. Dirichlet karakterlerini $\bmod 57$ göre hesaplarsak bunların sırasıyla 1, 1, 0, 1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, -1, 0, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 0,… olduğunu görürüz. Bunun sonucu olarak $\bmod 57$ Dirichlet karakterine göre;

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{57}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}-\frac{1}{17}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{26}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}$$

$$-\frac{1}{31}+\frac{1}{32}-\frac{1}{34}-\frac{1}{35}-\frac{1}{37}-\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}-\frac{1}{44}-\frac{1}{46}-\frac{1}{47}+\frac{1}{49}+\frac{1}{50}-\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\frac{1}{55}+\frac{1}{56}\cdots$$

$$=\frac{2\log(151+20\sqrt{57})}{\sqrt{57}}=1.512726...$$

elde ederiz. Örnek 2.2 ve 2.3'te K sayı cisminde sınıf sayısının değerini kullanarak $\bmod d_K$ Dirichlet karakterine göre $L(1,\chi)$ fonksiyonunun değerini hesapladık. Daha önce de belirttiğimiz gibi tersini yapmak ta mümkündür.

Teorem 2.8. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi olsun, $d_K, w, \varepsilon_K, f_{d_K}(x)$ daha once tanımlanan değerler ve fonksiyon olma üzere;

$$h=\begin{cases}\dfrac{w\sqrt{|d_K|}}{2\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{f_{d_K}(x)dx}{1-x^{|d_K|}} & d<0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{d_K}}{2\log\varepsilon_K}\displaystyle\int_0^1\frac{f_{d_K}(x)dx}{1-x^{d_K}} & d>0\end{cases}\tag{2.8}$$

dır.

İspat: (2.5) eşitliğinde $L(1,\chi)$ yerine (2.7) deki $d<0, d>0$ farklı durumlarındaki değerleri yerine yazılıp elde edilen formülde h yanlız bırakılırsa

$$h=\begin{cases}\dfrac{w\sqrt{|d_K|}}{2\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{f_{d_K}(x)dx}{1-x^{|d_K|}} & d<0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{d_K}}{2\log\varepsilon_K}\displaystyle\int_0^1\frac{f_{d_K}(x)dx}{1-x^{d_K}} & d>0\end{cases}$$

formülünü elde ederiz.

Denklem (2.5) yardımıyla $L(1,\chi)$'nın değerinin hesaplanması d değeri büyüdükçe oldukça zor ve karmaşık hale gelebileceği görülmektedir. Aşağıdaki teorem $L(1,\chi)$ fonksiyonunun değerlerinin bulunmasında oldukça kolay bir yol vermektedir.

Teorem 2.9. [1] $d<0$ kare-bağımsız olmak üzere d_K, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ sanal kuadratik sayı cisminin diskriminantını ve χ, $\bmod d_K$ Dirichlet karakterini göstermek üzere;

$$L(1,\chi)=-\frac{\pi}{d_K\sqrt{|d_K|}}\sum_{a=1}^{|d_K|}|a\chi(a)|=-\frac{\pi}{d_K\sqrt{|d_K|}}\left|1+\chi(2).2+\chi(3).3+...+|d_K|\chi(|d_K|)\right|\tag{2.9}$$

Eğer, $d>0$ kare-bağımsız bir tamsayı χ, $\bmod d_K$ Dirichlet karakteri ise bu durumda;

$$L(1,\chi)=\frac{-1}{\sqrt{d_K}}\sum_{a=1}^{d_K}\chi(a)\log\sin(a\pi/d_K)\,. \tag{2.10}$$

Örnek 2.4. $d=-33 \Rightarrow d_K=-132$ 'dir.

$1,7,17,19,23,25,29,37,41,43,47,49,59,65,71,79,97,101,119,127$ için $\chi(a \bmod 132)=1$, $5,13,31,35,53,61,67,73,83,85,89,91,95,103,107,109,113,115,125,131$ için $\chi(a \bmod 132)=-1$ ve $ebob(a,75)=1$ ise $\chi(a \bmod 132)=-0$ dır. O halde (2.9) kullanılırsa;

$$L(1,\chi)=\frac{\pi}{132\sqrt{132}}\left|1-5+7-13+17+19+23+25...-125+127-131\right|=\frac{\pi}{132\sqrt{132}}\left|-528\right|=\frac{2\pi}{\sqrt{33}}$$

≈ 1.093762 .

Dolayısıyla;

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-132}{n}\right)\frac{1}{n}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}-\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}$$

$$+\frac{1}{49}-\frac{1}{53}+\frac{1}{59}-\frac{1}{61}+\frac{1}{65}-\frac{1}{67}+\frac{1}{71}-\frac{1}{73}+\frac{1}{79}-\frac{1}{83}-\frac{1}{85}-\frac{1}{89}-\frac{1}{91}-\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{101}-\frac{1}{103}-\frac{1}{107}$$

$$-\frac{1}{109}-\frac{1}{113}-\frac{1}{115}+\frac{1}{119}-\frac{1}{125}+\frac{1}{127}-\frac{1}{131}...=\frac{2\pi}{\sqrt{33}}=1.093762$$

χ, $\bmod d_K$ Dirichlet karakteri olmak üzere kare-bağımsız $d=-1...-433$ için $L(1,\chi)$ fonksiyonlarının aldığı değerler Çizelge 2 ile verilmiştir. Çizelge hazırlanırken (2.9) denklemi göz önüne alınıp aşağıdaki Pari kodları kullanılmıştır.

```
{Lr(d)=
local(s,m,j);
if(issquarefree(d)<>1,
error("d kare bagimsiz olmali."));
s=1;\
for(j=1,abs(quaddisc(d)),\
s=((sin(Pi*j/quaddisc(d)))^(kronecker(quaddisc(d),j)))*s);\
m=-log(s)/sqrt(quaddisc(d));
return(m)
}
\ p 6;
for(d=2,443,\
if(issquarefree(d)==1,\
write("L(1,chi_reel).doc", d," ",Lr(d))))
```

χ, $\bmod d_K$ Dirichlet karakteri olmak üzere kare-bağımsız $d=1...434$ için $L(1,\chi)$ aldığı değerler Çizelge 1 ile verilmiştir. Çizelge hazırlanırken (2.9) denklemi göz önüne alınıp aşağıdaki Pari kodları kullanılmıştır.

```
{Ls(d)=
local(s,m);
if(issquarefree(d)<>1,
error("d kare bagimsiz olmali."));
s=0;\
for(j=1,abs(quaddisc(-d)),\
```

```
s=s+j*kronecker(quaddisc(-d),j));\
m=(abs(s)*Pi)/(abs(quaddisc(-d)*sqrt(abs(quaddisc(-d)))));
return(m)
}
\ p 6;
for(d=1,443,\
if(issquarefree(d)==1,\
write("L(1,chi_sanal).doc", -d," ",Ls(-d))))
```

Bu formül ve metodlar kullanılarak $L(1,\chi)$'lerin değerlerini artık daha kolay belirleyebiliriz Şimdi de (2.7)'deki sınıf sayısı ve $L(1,\chi)$ değerleri arasındaki ilişkiyi göz önüne alarak (2.9) ve (2.10) denklemlerini kullanarak bazı kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarını bu yolla hesaplayalım. Öncelikle $L(1,\chi)$ için yazılmış olan (2.7)'yi h için yeniden düzenlersek,

$$h=\begin{cases}\dfrac{w\sqrt{|d_K|}}{2\pi}L(1,\chi), & d<0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{d_K}}{2\log\varepsilon_K}L(1,\chi), & d>0\end{cases}\tag{2.11}$$

elde ederiz. Bununla birlikte (2.9) ve (2.10)'i göz önünde bulundurduğumuzda sonuç olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.10. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi ve d_K,ε_K,χ sırasıyla diskriminant, regulator ve Dirichlet karakterlerini göstermek üzere;

$$h=\begin{cases}-\dfrac{w}{2d_K}\left|\sum\limits_{a=1}^{|d_K|}a\chi(a)\right| & d<0\\[2ex] -\dfrac{1}{2\log\varepsilon_K}\sum\limits_{a=1}^{d_K}\chi(a)\log\sin(a\pi/d_K) & d>0\end{cases}\tag{2.12}$$

dır.

Örnek 2.5. $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{-33}\right)$ alınırsa $d_K=-132,\ \omega_K=2$ dir. Diğer yandan $a=1,7,17,19,23,25,29,37,41,43,47,49,59,65,71,79,97,101,119,127$ için $\chi(a \bmod d_K)=1$ ve $a=5,13,31,35,53,61,67,73,83,85,89,91,95,103,107,109,113,115,125,131$ için $\chi(a \bmod d_K)=-1$ ve $ebob(a,132)=1$ olan a'lar içinse $\chi(a \bmod d_K)=0$ dır. Bu durumda; $\sum\limits_{a=1}^{|d_K|}a\chi(a)=\sum\limits_{a=1}^{132}a\chi(a)=-528$ .O halde $h_K=-\dfrac{2}{2.(132)}(-528)=4$ elde ederiz.

Benzer şekilde $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{85}\right)$ reel kuadratik sayı cismini için $d_K=85$, $\varepsilon_K=4+\omega=\dfrac{9+\sqrt{85}}{2}, R=\log\varepsilon_K=2.209347$ 'dir.

Bu durumda sınıf sayısı

$$h=-\frac{1}{2\log\frac{9+\sqrt{85}}{2}}\sum_{a=1}^{85}\chi(a)\log\sin(a\pi/85)=-\frac{1}{2\log\frac{9+\sqrt{85}}{2}}.8.837390=2$$

olarak elde edilir.

Çizelge 1. $d=2...434$ için $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisimlerine karşılık gelen $L(1,\chi)$ fonksiyonlarının değerleri

d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$
2	0.623225	73	1.794636	146	0.938483	217	2.152641	290	0.828503	365	0.617054
3	0.760346	74	1.035646	145	2.112534	218	0.842354	291	1.492029	366	1.506661
5	0.430409	77	0.497927	149	0.673596	219	1.350709	293	0.331438	367	1.271681
6	0.935881	78	1.056041	151	1.787361	221	0.727449	295	1.771613	370	1.348163
7	1.046455	79	1.712992	154	1.717914	222	0.764726	298	1.577505	371	0.844030
10	1.150087	82	1.278110	155	0.997694	223	1.226421	299	0.777420	374	0.911556
11	0.902491	83	0.559779	157	0.855759	226	1.810545	301	1.156481	377	1.265766
13	0.662735	85	0.958550	158	0.767529	227	0.405779	302	0.918500	379	1.941262
14	0.908711	86	1.072202	159	1.250097	229	1.075469	303	0.979697	381	0.780338
15	1.065554	87	0.863058	161	1.586763	230	0.686280	305	1.577052	382	1.357001
17	1.016085	89	1.464441	163	1.462253	231	1.322177	307	1.083930	383	0.538214
19	1.337250	91	1.688687	165	0.796865	233	1.407615	309	0.970072	385	2.479635
21	0.683807	93	0.698098	166	1.703462	235	1.769768	310	1.629441	386	1.253677
22	1.274161	94	1.575084	167	0.450141	237	0.564299	311	0.982979	389	0.795953
23	0.807111	95	0.893944	170	0.999991	238	1.303839	313	2.187652	390	1.025410
26	0.907013	97	1.893495	173	0.390911	239	1.056456	314	0.765993	391	1.669065
29	0.611766	101	0.596669	174	1.208887	241	2.418356	317	0.504228	393	1.850943
30	1.127932	102	1.051189	177	1.764089	246	1.541322	318	0.601815	394	2.064301
31	1.440365	103	1.283704	178	1.209974	247	1.533062	319	1.911028	395	0.579840
33	1.332797	105	1.720149	179	1.191517	249	2.110940	321	2.030683	397	0.817598
34	1.457152	106	1.746070	181	1.066472	251	0.997930	322	1.442414	398	0.334944
35	0.837679	107	0.731062	182	0.591316	253	0.946672	323	0.797397	399	1.477149
37	0.819292	109	1.065972	183	1.017377	254	1.173544	326	1.076179	401	1.842450
38	0.698182	110	0.712637	185	1.444758	255	0.867886	327	0.671680	402	0.667045
39	1.252722	111	1.211148	186	1.410150	257	1.297485	329	1.695220	403	1.405539
41	1.299093	113	1.382352	187	1.187716	258	0.777247	330	1.185622	406	1.845619
42	1.005013	114	1.428405	190	1.676220	259	1.782445	331	1.992831	407	0.850625
43	1.349385	115	1.439708	191	1.208747	262	1.183859	334	1.777226	409	2.584507
46	1.591314	118	1.226894	193	2.170434	263	0.773021	335	0.775471	410	1.005026
47	0.665763	119	1.004816	194	0.856688	265	2.310878	337	2.334964	411	1.135247
51	1.289678	122	0.560073	195	0.954130	266	0.885688	339	1.323658	413	0.404539
53	0.540025	123	0.991323	197	0.475001	267	1.037593	341	0.609114	415	1.710396
55	1.397415	127	1.425335	199	1.715883	269	0.621893	345	2.048451	417	1.856470
57	1.512726	129	1.835837	201	1.953138	271	1.589701	346	1.685637	418	1.088092
58	1.388774	130	1.661595	202	1.230655	273	1.762924	347	0.755042	419	0.982327
59	0.906899	131	0.870445	203	0.664821	274	1.919263	349	1.051433	421	1.267717
61	0.938310	133	0.893688	205	1.050623	277	0.945515	353	1.263265	422	0.801152
62	0.614200	134	1.087092	206	0.814304	278	0.510851	354	1.398267	426	1.171209
65	1.377516	137	1.393813	209	1.582843	281	1.738377	355	1.535170	427	1.399600
66	1.198290	138	0.773483	210	1.120707	282	1.007064	357	0.622756	429	0.961107
67	1.403665	139	1.599663	211	1.861876	283	1.155463	358	1.405335	430	1.500765
69	0.774628	141	0.883754	213	0.587929	285	0.670476	359	1.041718	431	0.940710
70	1.486529	142	1.423918	214	1.911364	286	1.647646	362	0.382447	433	2.248559
71	1.050057	143	0.531233	215	0.610686	287	0.750378	363	0.956202	434	1.060151

Çizelge 2. $d=-1\ldots-433$ için $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sanal kuadratik sayı cisimlerine karşılık gelen $L(1,\chi)$ fonksiyonlarının değerleri

d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$	d	$L(1,\chi)$
-1	0.785398	-71	2.609869	-143	2.627132	-215	2.999568	-287	2.596193	-365	1.644385
-2	1.110721	-73	0.735391	-145	1.043580	-217	0.853061	-290	1.844807	-366	0.985282
-3	0.604599	-74	1.826014	-146	2.080000	-218	1.063878	-291	0.736654	-367	1.475908
-5	1.404963	-77	1.432071	-149	1.801585	-219	0.849157	-293	1.651804	-370	0.979942
-6	1.282550	-78	0.711431	-151	1.789614	-221	1.690611	-295	1.463285	-371	1.304827
-7	1.187410	-79	1.767284	-154	1.012627	-222	1.265099	-298	0.545963	-373	0.813328
-10	0.993459	-82	0.693862	-155	1.009355	-223	1.472636	-299	1.453464	-374	2.274270
-11	0.947226	-83	1.034504	-157	0.752179	-226	0.835903	-301	0.724314	-377	1.294402
-13	0.871321	-85	0.681507	-158	0.999727	-227	1.042574	-302	1.084670	-379	0.484118
-14	1.679252	-86	1.693833	-159	2.491445	-229	1.038011	-303	1.804798	-381	1.609487
-15	1.622311	-87	2.020885	-161	1.980737	-230	2.071505	-305	1.439097	-382	0.642952
-17	1.523896	-89	1.998049	-163	0.246069	-231	2.480419	-307	0.537901	-383	2.728974
-19	0.720731	-91	0.658657	-165	0.978291	-233	1.234875	-309	1.072314	-385	0.640442
-21	1.371103	-93	0.651536	-166	1.219174	-235	0.409870	-310	0.713722	-386	1.599029
-22	0.669790	-94	1.296122	-167	2.674141	-237	1.224410	-311	3.384724	-389	1.752136
-23	1.965202	-95	2.578565	-170	1.445695	-238	0.814557	-313	0.710293	-390	1.272646
-26	1.848351	-97	0.637961	-173	1.671956	-239	3.048191	-314	2.304774	-391	2.224280
-29	1.750137	-101	2.188201	-174	1.428981	-241	1.214207	-317	0.882247	-393	0.950834
-30	1.147147	-102	0.622128	-177	0.472273	-246	1.201804	-318	1.057031	-394	0.791356
-31	1.692740	-103	1.547752	-178	0.941889	-247	1.199369	-319	1.758954	-395	1.264565
-33	1.093762	-105	1.226352	-179	1.174068	-249	1.194542	-321	1.753466	-397	0.473016
-34	1.077557	-106	0.915415	-181	1.167564	-251	1.388069	-322	0.700297	-398	1.574738
-35	1.062052	-107	0.911128	-182	1.397222	-253	0.395021	-323	0.699212	-399	2.516422
-37	0.516475	-109	0.902730	-183	1.857866	-254	1.576968	-326	1.913964	-401	1.568837
-38	1.528901	-110	1.797235	-185	1.847796	-255	2.360810	-327	2.084766	-402	1.253507
-39	2.01223	-111	2.385494	-186	1.382116	-257	1.567737	-329	2.078419	-403	0.312988
-41	1.962537	-113	1.182145	-187	0.459472	-258	0.782348	-330	0.691756	-406	1.247317
-42	0.969517	-114	1.176948	-190	0.455830	-259	0.780836	-331	0.518033	-407	2.491567
-43	0.479088	-115	0.585910	-191	2.955130	-262	0.582265	-334	1.031402	-409	1.242734
-46	0.926405	-118	0.867621	-193	0.452274	-263	2.518346	-335	3.089584	-410	1.241218
-47	2.291242	-119	2.879893	-194	2.255532	-265	0.771946	-337	0.684534	-411	0.929780
-51	0.879822	-122	1.422132	-195	0.899897	-266	1.926234	-339	1.023767	-413	1.545877
-53	1.294593	-123	0.566536	-197	1.119146	-267	0.384525	-341	2.381775	-415	1.542147
-55	1.694449	-127	1.393856	-199	2.004314	-269	2.107009	-345	0.676551	-417	0.923067
-57	0.832228	-129	1.659611	-201	1.329545	-271	2.099220	-346	0.844465	-418	0.614641
-58	0.412511	-130	0.551072	-202	0.663125	-273	0.760551	-347	0.843248	-419	1.381292
-59	1.227002	-131	1.372411	-203	0.881986	-274	1.138743	-349	1.177159	-421	0.765559
-61	1.206719	-133	0.544821	-205	0.877673	-277	0.566280	-353	1.337681	-422	0.764652
-62	1.595931	-134	1.899746	-206	2.188851	-278	1.318941	-354	1.335790	-426	1.826528
-65	1.558666	-137	1.073617	-209	2.173085	-281	1.874117	-355	0.666957	-427	0.304065
-66	1.546813	-138	1.069721	-210	0.867162	-282	0.748317	-357	0.665083	-429	1.213420
-67	0.383807	-139	0.799399	-211	0.648829	-283	0.560245	-358	0.498115	-430	0.909006
-69	1.512813	-141	1.058279	-213	0.861034	-285	1.488735	-359	3.150331	-431	3.177829
-70	0.750984	-142	0.527273	-214	0.644265	-286	1.114598	-362	1.486066	-433	0.905852

KAYNAKLAR

[1] Kato, K., Kurokawa, N. ve Saito, T., "Number Theory 1-Fermat's Dream, Translations of Mathematical Monographs", American Mathematical Society, 81-134, 2000.
[2] Edwards, H. M., "Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory", Springer-Verlag, 344-364, 1977.
[3] Murty, M. R., "Problems in Algebraic Number Theory", Springer Verlag New York Inc, 125,136, 1999.
[4] Apostol, T. M., "Introduction to Analytic Number Theory", Springer-Verlag, 224-255, 1976.