**Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Haziran 2014, Sayı 30, 23 - 55**

# Sınıf Öğretmeni Adaylarının İspatla İlgili Görüşleri: Formal İspat- Temsili İspat

# Pre-Service Primary Teachers' Opinions on Proof: Formal Proof-Enactive Proof

Bekir Kürşat DORUK

Yasemin KIYMAZ

Tuğba HORZUM

Zekiye MORKOYUNLU

**Özet**

Okula başlamalarıyla birlikte öğrencilerin matematiksel deneyimleri içerisine ispatı yerleştirme fikri erken dönemde ispat konusunun önemini arttırmaktadır. Çocuklara bu dönemlerinde eğitim verecek olan sınıf öğretmenlerine bu açıdan önemli görevler düşmektedir. Buradan hareketle hem formal ispat, hem de informal bir ispatlama etkinliği olan, fiziksel bir hareketi, görsel ve sözel desteği içeren, temsili ispatlara yönelik sınıf öğretmeni adaylarının görüşlerinin araştırılmasının yararlı olacağı düşünülmüştür. Bu amaçla 184 sınıf öğretmeni adayına matematiksel ispat yapmaya yönelik görüş anketi uygulanmış, katılımcılardan 30 kişilik bir grupla temsili ispat yapma etkinliği düzenlenmiştir. Ardından etkinliğe katılan 11 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Anketten elde edilen veriler incelendiğinde sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel bir sonucun doğruluğuna inanmada, matematiksel olguları açıklamada ispatın önemli ve gerekli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Ancak adayların büyük bölümünün zaten ispatlanmış önermeleri kendilerinin ispatlamaya çalışmasının gereksiz olduğunu düşündüğü, ispat yapmayı sevmediği, sıkıcı bulduğu ve bu konuda kendilerine güvenmediği belirlenmiştir. Görüşmelerin analizinde gerek ispatla ilgili görüş anketinden yüksek puan alan, gerekse düşük puan alan öğretmen adaylarının ispatların mümkün olduğu sürece temsili ispatlarla desteklenmesi gerektiği, bunun oldukça eğlenceli olduğu ve anlamlı öğrenmeye, kalıcılığa, matematiği sevmeye katkı sağlayacağı görüşünde oldukları ortaya çıkmıştır.

***Anahtar Kelimeler:*** Sınıf öğretmen adayları, ispat yapma, formal ispat, temsili ispat.

**Abstract**

The idea of incorporating proof into students' mathematical experiences from the beginning of their schooling raises importance of proof in the early grades. In this respect, primary school teachers have a significant role. Therefore, it might be valuable to investigate the pre-service primary school teachers' opinions on both formal and enactive proofs. To this end, 184 pre-service primary school teachers were given a questionnaire on mathematical proofs. Then an enactive proof activity was carried out. Thirty participants took part in this activity. Semi-structured interviews were conducted with eleven of the participating pre-service teachers. Based on the findings, pre-service teachers believe proofs are important and necessary for explaining mathematical concepts. However, the majority of the pre-service teachers thought that it was unnecessary to try to prove the propositions already proved. They do not trust themselves on proving. Based on the findings obtained from interviews, pre-service teachers receiving high or low scores from the formal proof questionnaire believe that if possible, proofs should be supported by enactive proofs that this is enjoyable and contribute to meaningful learning and making students love mathematics. Based on conclusions, some suggestions were put forward to overcome difficulties that students face with proof and to help the pre-service primary teachers develop positive attitude towards proof.

*Key words:* Pre-service primary teachers, proving, formal proof, enactive proof.

## Giriş

Matematikte herhangi bir durumun doğruluğunu veya yanlışlığını açıklayan temel bir süreç ve yöntem olan ispat matematiksel anlayışı ilerletmede etkili bir öğrenme aracıdır. İspat, matematiksel anlayışın temeli olmasının yanında matematiksel bilgiyi tesis etmede , geliştirmede ve iletmede önemli bir rol üstlenmektedir. Bu nedenle ispat, matematik eğitiminin anahtar bir bileşeni konumunda olması gerekir (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Knuth, 2002; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Schoenfeld,1994; Stylianides, 2007a; Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Son yıllarda matematik eğitimi alanında farklı yaş grubundaki öğrencilerin ispat yaparken zihinsel süreçleri, bilişsel yönleri ve gelişimlerinin incelenmesiyle birlikte matematikte ispatın yeri ve önemi daha da iyi anlaşılmıştır. (Altıparmak ve Öziş, 2005; Mejia-Ramos, 2005; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Selden ve Selden, 2009; İskenderoğlu, Baki ve Palancı, 2011). Ancak araştırmalar öğrencilerin ispat yazma, yapma ve anlamada büyük güçlükler çektiğini göstermektedir (Balacheff, 1991; Healy ve Hoyles, 2000). Öğretmenler matematik derslerinde bir önermeyi ispatlamak istediklerinde öğrencilerin "Neden bunu ispatlamak zorundayız?" sorusuna çokça maruz kalmaktadır (de Villers, 1990). Birçok öğrenci için ispat belirli bir kalıba göre ve sırf sembollerle yazmaları gereken anlamı olmayan bir ritüelden ibarettir (Ball ve diğ., 2002). Öğrencilerin ispat konusunda yaşadıkları güçlüklerden yola çıkan bazı eğitimciler, ispatın orta öğretimin son yıllarındaki öğrenciler için uygun olduğunu savunmuşlardır. Geleneksel olarak ispatın sadece üniversiteye gitmeye niyetli olan öğrencilerin matematik eğitiminde bir rol oynaması beklendiğini ifade eden (Knuth, 2002), orta öğretimde görev yapan öğretmenlerin ispatı bütün öğrencilerin matematik eğitiminde kullanmanın zor olacağını düşündüklerini ve öğrencilerin ancak azınlık kısmının eğitimi için uygun olarak gördüklerini belirlemiştir. Daha ileri düzeyde matematik öğretmen adayları ve üniversite öğrencilerinin lisans derslerinde karşılaştıkları ispatları yapmada ve anlamada zorluk çektiklerini gösteren araştırmalar da vardır (Jones, 2000; Weber, 2001; Turker, Alkas, Aylar, Gurel ve Akkuş-İspir, 2010).

İlerleyen yıllarda öğrencilerin ispat konusunda yaşadıkları güçlüklerin bir sebebi okul yaşamlarının erken dönemlerinde ispata gereken önemin verilmemesi ve lise yıllarında aniden ispatla karşılaşmalarıdır (Balacheff, 1988; Sowder ve Harel, 1998; Healy ve Hoyles, 2000). Bu sorunun çözümü için ortaya atılan, okula başlamalarıyla birlikte öğrencilerin matematiksel deneyimleri içerisine ispatı yerleştirme fikri erken dönemde ispatın önemini arttırmaktadır. Ancak erken dönemde ispat eğitimi üzerine yeterince dikkat çekilememiştir (Stylianides, 2007 b). National Council of Teachers of Mathematics'in [NCTM] (2000) yayınladığı okul matematiği için prensip ve standartlarda ispatın öğrenciler için gayet zor bir alan olduğu, sadece mantık konusunun içinde ya da geometride ispat teknikleri başlığı altında öğretilemeyeceği vurgulanmıştır. Ayrıca ispatın anasınıfından 12. sınıfa kadar matematiğin bir parçası olarak öğrenilmesi gerektiği ifade edilmiştir. Buna göre ispat müfredatın özel konularında bazı özel zamanlarda yapılacak bir aktivite olarak ele alınmamalıdır. Aksine konu ayırt etmeden dersin öğretim sürecinin doğal akışının bir parçası olmalıdır. Bu standartlara göre küçük öğrenciler varsayımlarını kendi cümleleriyle ifade etmekte ve varsayımlarını araştırırken somut materyal ve örneklerden yararlanmaktadırlar. Dolayısıyla öğrenciler düzeylerine göre varsayımlarının doğruluğunu araştırmanın yollarını ve düzey yükseldikçe kanıtlama yöntemleri ile matematiksel gösterimleri öğrenmelidir. Yani ispat her düzeyde müfredata yerleştirilmelidir (Schoenfeld, 1994). Matematik eğitiminin her aşamasında ispata yer vermekle öğrencilerin ispatla aniden tanışmasının yol açtığı olumsuzluklardan da kurtulmak mümkün olabilir. Bu aşamada ilkokul öğrencileri için ne tür ispatlama etkinlikleri yapılabileceği sorusu akla gelmektedir. Eğer öğrencilere farklı ispat türleriyle etkileşim olanağı verilirse, matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi kavrama olanağı bulabileceklerdir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Yani öncelikle ispatın öğretimi konusunda dünya çapında farklı ve daha cazip yaklaşımlara gereksinim vardır. Örneğin fiziğe ait argümanları ispatta kullanmak öğretmen ve öğrencilerin bu konudaki motivasyonunu artırabilir. Böylelikle ispat öğretiminde modeller inşa etme, "niçin" sorusuna cevap için argümanlar bulma, varsayımların sonuçlarını inceleme gibi yararlı etkinliklere yer verilmiş olacaktır (Ball ve diğ., (2002). Görselleştirme formal ispat olarak asla kabul edilmemekle birlikte kesin (*rigorous*) matematiksel ispatlara yol gösterici olabilir (Francis 1996; Palais 1999). Hawkins (2007) araştırmasında, ispatta görsel desteğin önemli olduğunu ve öğrencilerin daha iyi öğrenmelerini sağladığını belirterek; görsel ispatın diğer ispat yöntemleri gibi matematik eğitiminde önemli bir yeri olduğuna dikkat çekmiştir. Öğrenciler için açıklayıcı bir güce sahip olduğundan görsellik içeren ispatların etkin bir şekilde kullanımının yararlı olacağı düşünülebilir. Nitekim Arslan (2007) özellikle ilköğretim düzeyinde teorik ispatlara göre görsel destekli ispatların daha önemli olduğunu belirtmiştir.

Tall (1999) küçük yaştaki çocuklar için ispatın fiziksel bir gösterim yoluyla olabileceğini ifade ettikten sonra öklit geometrisindeki sözel ispatların ustaca kullanımının okuldaki öğrencilerin bir bölümü ile başarılı bir şekilde tanıştırılabildiğini dile getirmiştir. O'na göre aksiyomlardan yola çıkan formal ispat daha büyük güçlükler içermektedir ve bu nedenle formal ispat çok az bir kısım öğrenci için uygun görülmekte, birçok öğrenci için ise girilmesi imkansız bir kale haline gelmektedir. Formal ispata geçiş için bazı stratejiler önermesine rağmen bu geçişin büyük bilişsel çabalar gerektirdiğini belirten Tall'a (1999) göre formal ispat sadece bazıları için uygun iken bazı ispat biçimleri daha çok kişi için uygundur. Fiziksel gösterimlerin (*demonstration*) kullanımı gibi ispatın daha basit temsillerine olanak verildiğinde ispatın bazı formları hemen hemen herkes için uygun olabilir. Tall' un (1999) çalışması çerçevesinde bilişsel gelişim düzeylerine göre ispat türleri Şekil 1'de özetlenmiştir. Burada görüldüğü gibi temsili ispatlar ve diğer informal ispat türleri kesin matematiksel ispatlar olarak kabul edilmeseler de formal ispata, yani matematikçiler tarafından ispat olarak kabul edilen kanıtlama türüne ulaşmak amacıyla basamak olarak kullanılabilirler. Küçük öğrenciler doğrudan formal anlamda ispatlarla çalışamayacaklarına göre, ilerleyen yıllarda aniden bu ispat türüyle karşılaşmak yerine öncesinde daha alt düzeydeki ispatlama etkinlikleriyle çalışmaları, onları gerçek ve kesin matematiksel ispatlara hazırlayıcı nitelikte olabilir.

Şekil 1

*Öğrencilerin bilişsel gelişim düzeylerine göre ispat türleri*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mantıksal | **FORMAL İSPAT** | | |
| Geçiş | Genel Görsel İspatın Bir Sözlü Çevirisi Olarak Öklidyen İspat | | |
| Anlamlı (Meaningful) | Geometrik İfadelerin Görsel İspatı | Sayısal ve Cebirsel İfadelerin Grafik İspatı (Genel diyagramlarla görselleştirme) | Cebirsel manipülasyonlar aracılığıyla cebirsel ispat |

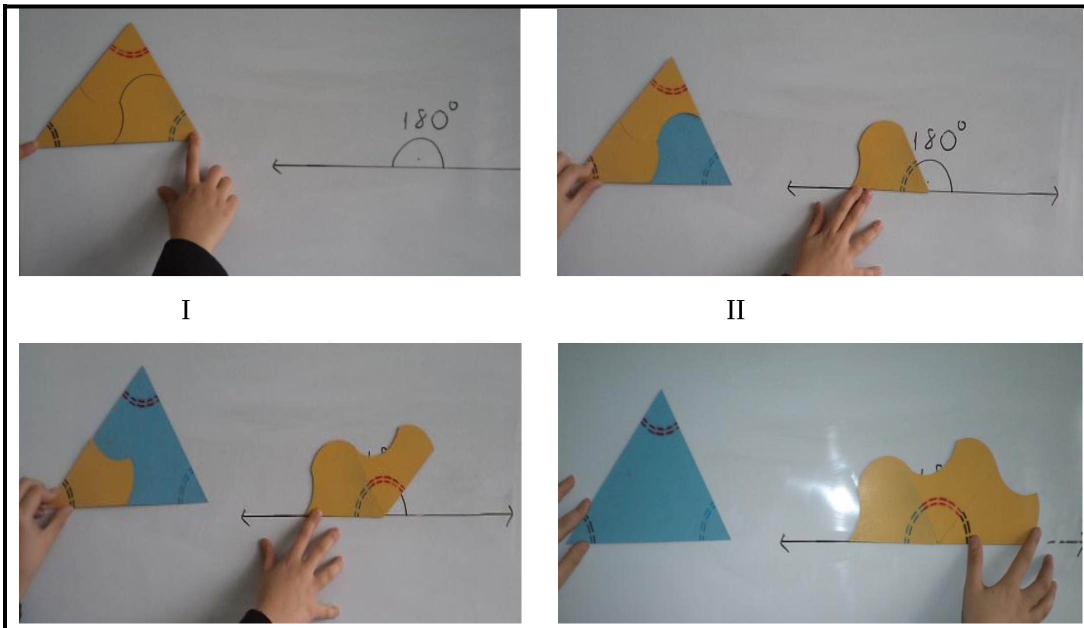
Temsili (Canlandırmayla, Fiziksel Modelle) İspat
(*Enactive Proof*)

Eğitimle ilgili her reform hareketinde olduğu gibi ispatın okul matematiğinin her aşamasına yerleştirilmesi sürecinde de en önemli görev öğretmenlere düşmektedir (Chazan, 1990; Knuth, 2002). Bir konu ile ilgili inançları ve tutumları arasındaki sıkı ilişki öğretmenlerin öğretim uygulamalarını doğrudan etkilemektedir (Thompson, 1992). Buradan hareketle son yıllarda matematik öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat yapmaya yönelik görüşleri üzerine birçok araştırma yapılmıştır (Moralı ve diğ., 2006; Turker ve diğ., 2010; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Stylianides, Stylianides ve Philippou 2007; Knuth, 2002). Ancak ileride daha küçük yaşlardaki öğrencileri eğitecek olan sınıf öğretmeni adaylarının ispat yapma ile ilgili düşünceleri üzerine yeterince odaklanılmamış ve yapılan araştırmalar genel olarak sınıf öğretmen adaylarının formal anlamda ispat hakkındaki düşünceleriyle sınırlı kalmıştır. Oysa sınıf öğretmeni adaylarının ispata bakışları, ispatla ilgili inançları ve tutumları, doğrudan ispat konusunu öğretmeyecek olsalar bile önemlidir. Çünkü ispat ilkokul matematiği müfredatına oldukça sınırlı düzeyde girdiği için öğrencilerin ispat ve doğrulama ile deneyimlerinin ana kaynağı sınıf öğretmenleridir (Martin ve Harel, 1989) ve sınıf öğretmen adayları da diğer öğrenciler gibi ispat konusunda güçlükler yaşamaktadır (Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis, 2003; Gholamazad, 2007). Bu noktada sınıf öğretmen adaylarının ispata karşı tutumlarını olumlu yönde geliştirmek için neler yapılabilir sorusu ortaya çıkmaktadır. Onların farklı ispat türleriyle ilgili düşüncelerinin araştırılması bu konuda katkı sağlayabilir. Buradan hareketle bu çalışmada sınıf öğretmeni adaylarının hem formal ispat yapmaya yönelik düşünceleri hem de informal bir ispat biçimi olan ve Tall (1999)'un küçük çocuklar için (sadece onlar için değil) uygun olabileceğini ifade ettiği, canlandırma ve fiziksel model yardımıyla yapılan temsili (*enactive)* ispata yönelik düşüncelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Tall (1999)'un temsili ispat olarak adlandırdığı ispat türüne bir örnek Şekil 2'de görülmektedir. En temel düzeyde bulunan bu ispat, verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermek için fiziksel bir hareketi, ayrıca görsel ve sözel desteği içermektedir. Bu örnekte parçalanan bir üçgenin köşeleri bir doğru üzerine taşınarak birleştirildiğinde $180^{o}$'lik bir doğru açı elde edilmekte böylece üçgenin iç açıları toplamının $180^{o}$ olduğu (temsili ispat yoluyla) ispatlanmaktadır.

Şekil 2

*Temsili (enactive) ispata bir örnek*




I II

III IV

# Yöntem

## Araştırmanın Modeli

Nicel ve nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı bu araştırmada öncelikle öğretmen adaylarının tümüne Almeida (2001)'nın araştırmasında kullandığı ve Türkçe'ye Moralı ve diğerleri (2006) tarafından uyarlanan matematiksel ispat yapmaya yönelik görüş anketi uygulanmıştır. Ardından rastgele seçilen bir grupla $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ özdeşliğinin temsili ispatında kullanmak üzere somut bir model geliştirme etkinliği düzenlenmiştir. Etkinlik sırasında öğretmen adaylarının yaptığı çalışmalar kayıt altına alınmıştır. 5 kişilik gruplar halinde çalışan öğretmen adayları etkinliğin sonunda oluşturdukları modeli kullanarak küp açılımı özdeşliğini arkadaşlarına ispatlamaya (temsili ispat yoluyla) çalışmışlardır. Daha sonra bu etkinliğin düzenlendiği gruptaki öğretmen adaylarından ispata yönelik görüş anketinden en düşük puanı alan 7, en yüksek puanı alan 4 tanesi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

## Çalışma Grubu

Araştırmanın birinci bölümünün katılımcılarını sınıf öğretmenliği bölümü 1. Sınıfında eğitim gören, 149'u kız, 35'i erkek olmak üzere, 184 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öncelikle öğretmen adaylarının tamamına ispat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketi uygulanmıştır. Ardından bu 184 aday içerisinden rastgele seçilen bir grup ile (32 öğretmen adayı) düzenlenen $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ açılımının ispatı için somut model geliştirme ve bu model yardımıyla temsili ispatlama etkinliği gerçekleştirilmiştir. Son olarak da etkinliğin gerçekleştirildiği bu gruptan 11 öğretmen adayıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeye katılacak öğretmen adayları belirlenirken çeşitliliği sağlamak amacıyla ispat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketinden alınan puanlara göre düşük ve yüksek seviyede bulunma durumları göz önünde bulundurulmuştur. Bu bağlamda adaylardan 7'sinin ispat ve ispat yapmaya yönelik görüşleri olumsuz, 4'ünün de olumlu yöndedir. Görüşmelere katılan öğretmen adaylarının ispata ve ispat yapmaya yönelik görüş anketinden aldıkları puanlar Tablo 1'deki şekildedir. Anketten aldıkları puanlara göre en alt sıralarda bulunan 7 öğretmen adayı D1-D7, üst sıralarda bulunan 4 öğretmen adayı da Y1-Y4 şeklinde gösterilmiştir.

Tablo 1

*Görüşmeye Katılan Öğretmen Adaylarının Anketten Aldıkları Toplam Puanlar.*

| Öğretmen Adayı | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Puan | 50 | 53 | 53 | 53 | 54 | 55 | 57 | 77 | 79 | 79 | 79 |

Veri Toplama Aracı

Sınıf öğretmeni adaylarının ispata ilişkin görüşlerini almak amacıyla, Moralı ve arkadaşlarının (2006), Almeida (2001)'nın çalışmasında kullandığı ölçekten yararlanarak geliştirdikleri likert tipi ölçek kullanılmıştır. Moralı ve diğerlerinin (2006) geliştirdikleri bu ölçeğin güvenirliği 0. 80 olarak belirlenmiştir. Yedi faktörlü olan bu ölçek için faktörlerin ölçeğe ilişkin açıkladıkları toplam varyans %59'dur. Bu yedi faktörün sırasıyla öğrencilerin kişisel ispat yeterliliklerini, ispat yapmanın önemine yönelik görüşlerini, ispatın teoremi anlamaya etkisine yönelik görüşlerini, ispat yapmaya yönelik benlik algılarını, ispat yapmaya yönelik genel görüşlerini, örneklendirmenin ispat sayılıp sayılamayacağı hakkındaki görüşlerini, problem çözme ve matematiksel ispat arasındaki ilişkiye yönelik görüşlerini belirlediği görülmüştür. Bu çalışma için tekrar hesaplanan Cronbach Alpha güvenirlik katsayısı ise 0.86 olarak bulunmuştur. Temsili ispat etkinliği öncesinde uygulanan bu anket öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmayla ilgili düşüncelerini belirlemek, ayrıca temsili ispatla ilgili görüşme yapılacak öğretmen adaylarını seçmek için kullanılmıştır.

Ölçeğin uygulanmasının ardından araştırma grubundan rastgele seçilen bir sınıftaki 32 kişilik grupla araştırmacıların rehberliğinde yapılan ispat için model geliştirme etkinliğinde tüm sınıfın video kaydı alınmış ayrıca farklı grupların çalışmaları da ses kayıt cihazlarıyla kaydedilmiştir. Ardından uygulamaya katılan öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

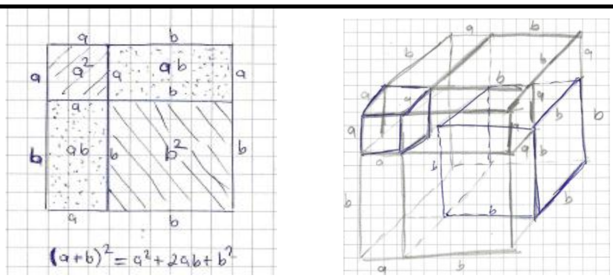
Görüşme soruları hazırlanırken, öğretmen adaylarının formal ispat ve temsili ispata yönelik düşüncelerini karşılaştırabilmek için, ispat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketindeki sorulardan yararlanılmıştır. Örneğin anketteki " İspatlarla uğraşmak çok sıkıcıdır." maddesinden yola çıkarak görüşme formunda "Sence temsili ispat yapma etkinliği sıkıcı mıydı?" sorusuna yer verilmiştir. Yine benzer şekilde ankette yer alan "Bence teoremi (ya da önermeyi) bilmek ispatını yapmaktan daha önemlidir." maddesine paralel olarak "Sence küp açılımını bilmek mi yoksa onun bu şekilde temsili ispatını yapmak mı önemli ?" şeklinde bir soru oluşturulmuştur. Ayrıca karşılaştırma amacıyla hangi tür ispatın daha açıklayıcı, anlaşılır ya da inandırıcı olduğuna dair sorulara da görüşme formunda yer verilmiştir. Hazırlanan görüşme soruları matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesinin görüşleri doğrultusunda yeniden düzenlenerek son halini almıştır. Görüşmelere başlamadan katılımcılar kesin matematiksel ispat (formal ispat) ve temsili ispat konusunda, derste önceden gerçekleştirilmiş olan ispatlama etkinlikleri de hatırlatılarak bilgilendirilmişlerdir. Görüşmelerde önceden oluşturulan görüşme formundaki soruların yanında adayların verdiği yanıtları derinleştirmeye yönelik ek sorular ve sondalar da kullanılmıştır. Görüşmeler, uygulamanın bittiği haftadan bir sonraki hafta öğretmen adaylarının uygun oldukları zaman aralıklarında yapılmıştır. Gönüllülük esasına dikkat edilerek belirlenen katılımcılara görüşmeler öncesinde araştırmanın amacı, elde edilen verilerin sadece araştırma amacıyla kullanılacağı ve kişisel bilgilerinin gizli tutulacağı konusunda açıklamalar yapılmıştır. Yaklaşık olarak on beşer dakika sürmüş olan görüşmeler ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır.

## Uygulama Süreci

Üniversite eğitimlerinin birinci yılında aldıkları Temel Matematik dersi kapsamında araştırmanın katılımcısı olan öğretmen adaylarına ilk ve ortaöğretimde karşılaşmış oldukları matematiksel kavramları derinlemesine inceleme olanağı sunmak ve yüzeysel olarak öğrenmiş oldukları bazı kuralların nedenlerini araştırarak öğrenmelerini sağlamak amaçlanmıştır. Bu bağlamda özdeşlikler konusuna başlamadan önce kümeler, sayılar ve denklemler konularıyla ilgili bazı temel önermelerin ispatları üzerinde durulmuştur. Bu ispatlar yapılırken formal ispat yöntemlerinden yararlanılmıştır. Matematiksel ispat ve ispat yapma konulu anketin tüm gruplara uygulanışının ardından cebirsel özdeşliklerin ispatlarına sıra geldiğinde geometrik ispatlardan yararlanılmıştır. Öncelikle ikinci dereceden bazı ifadelerin geometrik ispatları üzerinde durulmuştur. Ancak $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ özdeşliğinin ispatı sırasında özdeşliğin geometrik olarak anlamı tartışıldıktan sonra geometrik ispat için sınıfça yapılan çizim çalışmasında ve yorumlanmasında bazı güçlüklerle karşılaşılmıştır (Şekil 3). Bunun üzerine temsili ispat etkinliğinin uygulanacağı 32 öğretmen adayı ile birlikte bu özdeşliği somut olarak ifade eden bir model geliştirilerek onun aracılığıyla ispatın yapılması kararlaştırılmış ve 4 kişilik gruplar oluşturularak sonraki derse kullanmak istedikleri malzemelerle birlikte gelmeleri istenmiştir. İlk ders saati öğretmen adaylarının modeli oluşturmak için planlama, hesaplama ve deneme çalışmalarıyla geçmiştir. Sonraki üç ders saati boyunca modellerini tamamlayanlar (Şekil 4) son olarak bir ders saati süresince sınıf arkadaşlarına modellerini kullanarak özdeşliği ispatlamaya çalışmışlardır.

Şekil 3

*2. ve 3. Dereceden özdeşliklerin geometrik ispatları için yapılmış bazı çizimler*

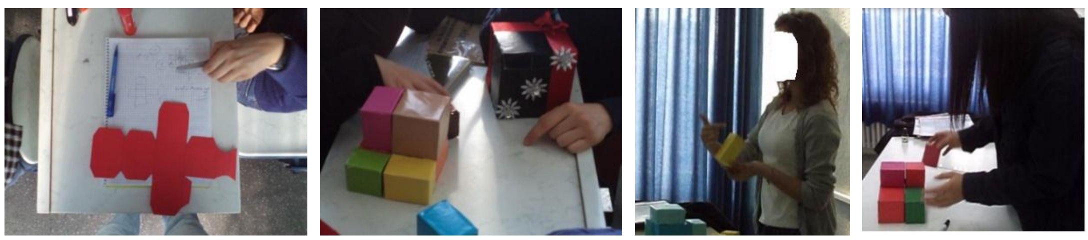



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Benzer yolların kullanıldığı ispatlama etkinliğinde gruplar genellikle farklı boyutlardaki prizma ve küpleri birleştirerek bir kenar uzunluğu $a + b$ birim olan küpü nasıl elde ettiklerini görsel ve sözel destek kullanarak açıklamışlardır (Şekil 4). Uygulamalardan sonra bu gruptaki 11 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler düzenlenmiştir.

Şekil 4

*Modeli geliştirme ve onu kullanarak temsili ispat yapma etkinliğinden kesitler.*



Verilerin Analizi

İspat yapmaya yönelik görüş anketinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde SPSS 16.0 paket programı kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının anketten aldıkları toplam puanı hesaplamak için ispat ve ispat yapma konusunda olumlu görüş ifade eden maddelere, tamamen katılıyorum yanıtına 5 puan, kesinlikle katılmıyorum yanıtına 1 puan verilmek suretiyle puanlama yapılmıştır. 20 maddeden oluşan ölçekten alınabilecek en yüksek puan 100, en düşük puan ise 20'dir. Bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters yönde puanlanmıştır. Bu puanlama yardımıyla öğretmen adayları ispata yönelik görüşlerinin olumluluk düzeyi açısından üç gruba ayrılmıştır. Bu gruplama yapılırken ölçeği Türkçe' ye uyarlayan Moralı ve arkadaşlarının (2006) belirlediği ölçütlere göre hareket edilerek her bir madde için 3,5 üstü bir puan yüksek ve istenilen bir puan, 2,5 ve altı puan ise düşük düzeyde bir puan olarak kabul edilmiştir. Böylece 70 ve üzeri puanlı öğretmen adaylarının ispatla ilgili olumlu düşüncelere, 60'ın altında puanı olanların ise olumsuz düşüncelere sahip olduğu, 60-70 arası puanların da kararsızlara ait olduğu düşünülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının anketin maddelerine ortak olarak katılıp katılmama durumlarını belirlemede sorulara tersten puanlama yapılmadan her bir maddenin katılım ortalamaları hesaplanmıştır.

Görüşmelerden elde edilen verilerin çözümlenmesinde ise, içerik analizi türlerinden tümevarımcı analizden yararlanılmıştır. Bu analizde amaç kodlama yoluyla verilerin altında yatan kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmaktır (Yıldırım ve Şimsek, 2005, s. 227). Tümevarımcı analiz için ilk olarak görüşmeden elde edilen veriler araştırmacılar tarafından yazılı hale getirilmiştir. İkinci aşamada araştırmacılar ayrı ayrı yazılı verileri kodlamışlardır. Daha sonra yapılan kodlamalar karşılaştırılarak, uyuşma sağlanmayan bölümlerle ilgili görüş alışverişinde bulunulmuştur. Ardından üzerinde anlaşma sağlanan ortak kodlamalar ışığında temalar oluşturulmuştur.

## Bulgular

Bu bölümde öncelikle ispat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketi yardımıyla elde edilen ve öğretmen adayların matematiksel ispatlar hakkındaki görüşlerini yansıtan nicel bulgulara yer verilecektir. Ardından temsili ispatın kullanıldığı etkinliğe katılan öğretmen adaylarından 11 tanesiyle gerçekleştirilen görüşmelerden elde edilen ve bu öğretmen adaylarının temsili ispat etkinliği ile ilgili düşüncelerini yansıtan nitel bulgular sunulacaktır.

İspat ve İspat Yapmaya Yönelik Görüşler

İspat yapmaya yönelik görüş anketinden toplamda 70 ve üzeri puanın ispata yönelik olumlu görüşleri, 60-69 arası puanın ispatla ilgili konularda kararsızlığı, 60'ın altında puanların da ispat hakkındaki olumsuz yönde görüşleri yansıttığı göz önünde bulundurularak bakıldığında, öğretmen adaylarının % 37, 5'inin 70 ve üzeri, % 28,8'inin 60-69 arasında ve %33,6'sının da 60'ın altında puan aldıkları görülmüştür.

Aşağıda ispat yapmaya yönelik görüş anketinde öğretmen adaylarının çoğunluğunun ortak olarak katıldıkları, katılmadıkları ve görüş ayrılıklarının olduğu maddelerin yüzde ve frekans tabloları ayrı ayrı verilmiştir.

İspatla ilgili görüş anketindeki, öğretmen adaylarının çoğunluğunun katıldıkları maddelere ilişkin bulgular Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2

*Öğretmen Adaylarının Çoğunluğunun Katıldıkları Maddelere İlişkin Frekans ve Yüzde Dağılımları*

| Madde No | Tamamen katılıyorum | | Katılıyorum | | Kararsızım | | Katılmıyorum | | Kesinlikle Katılmıyorum | | Ort |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | F | % | f | % | |
| 1 | 63 | 34,2 | 92 | 50 | 20 | 10,9 | 6 | 3,3 | 3 | 1,6 | 4,11 |
| 2 | 59 | 32,1 | 95 | 51,6 | 15 | 8,2 | 7 | 3,8 | 8 | 4,3 | 4,03 |
| 4 | 61 | 33,2 | 63 | 34,2 | 35 | 19 | 14 | 7,6 | 11 | 6 | 3.8 |
| 7 | 62 | 33,7 | 86 | 46,7 | 20 | 10,9 | 12 | 6,5 | 4 | 2,2 | 4,03 |
| 11 | 30 | 16,3 | 89 | 48,4 | 29 | 15,8 | 25 | 13,6 | 11 | 6 | 3,55 |
| 12 | 41 | 22,3 | 90 | 48,9 | 23 | 12,5 | 23 | 12,5 | 7 | 3,8 | 3,73 |
| 13 | 47 | 25,5 | 113 | 61,4 | 16 | 8,7 | 5 | 2,7 | 3 | 1,6 | 4,06 |
| 15 | 34 | 18,5 | 94 | 51,1 | 32 | 17,4 | 17 | 9,2 | 7 | 3,8 | 3,71 |
| 19 | 41 | 22,3 | 61 | 33,2 | 32 | 17,4 | 43 | 23,4 | 7 | 3,8 | 3,46 |

Tablo 2'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bölümü 1, 2, 4, 7, 11, 12, 13 ve 15 numaralı maddelere katılmaktadırlar. Bu maddelerden yola çıkıldığında sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel ispatın olguları hem gerçekleyip hem de açıkladığını (1: % 84,2), matematiksel bir sonucun ispatlanmasının doğruluğuna inanmak için gerekli olduğunu (2: %83,7), ispatların bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerdiğini (7: %80,4), matematiksel ispatların başka matematiksel sonuçlarla ilişkili olduğunu (13: %86,9) ve ispatın teorik matematik için vazgeçilmez olduğunu (4: %77,4) düşündükleri görülmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının büyük bölümünün ispatın aşamaları üzerinde çalışmanın neden doğru olduğunu anlamalarına yardımcı olduğu (11 :%64,7), teoremin farklı ispatlarını görmenin daha iyi anlamalarına yardımcı olduğu (12 :%71,2), ispat yapmanın bir anlamda problem çözme olduğu (15:%69,6) konularında da hemfikir oldukları görülmektedir. Öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının ise teoremin ifadesini anlamalarına rağmen ispatını anlamada zorlandıkları (madde 19: %55,5) belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının çoğunluğunun katılmadığını ifade ettikleri maddelere ilişkin bulgular Tablo 3'de verilmiştir.

Tablo 3

*Öğretmen Adaylarının Çoğunluğunun Katılmadıkları Maddelere İlişkin Frekans ve Yüzde Dağılımları*

| Madde No | Tamamen katılıyorum | | Katılıyorum | | Kararsızım | | Katılmıyorum | | Kesinlikle Katılmıyorum | | Ort |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | F | % | f | % | |
| 5 | 14 | 7,6 | 33 | 17,9 | 30 | 16,3 | 81 | 44 | 26 | 14,1 | 2,60 |
| 9 | 15 | 8,2 | 35 | 19 | 32 | 17,4 | 54 | 29,3 | 48 | 26,1 | 2,53 |
| 10 | 11 | 6 | 28 | 15,2 | 44 | 23,9 | 58 | 31,5 | 43 | 23,4 | 2,48 |
| 16 | 14 | 7,6 | 10 | 5,4 | 21 | 11,4 | 90 | 48,9 | 49 | 26,6 | 2,18 |

Tablo 3'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının büyük bölümü anketteki 5,9,10,16 numaralı maddeler için tamamen katılmıyorum ya da katılmıyorum ifadesini işaretlemişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematikte sadece örnekler yardımıyla doğrulamanın yapılabileceği (5: % 58,1) ve matematiksel ispatı sadece profesyonellerin yapabileceği (16: % 75,5) görüşünde olmadıkları anlaşılmaktadır. Ayrıca öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının matematiksel ispat yapmayı sevmedikleri (9: % 55,4) ve kendi kendilerine ispat yapma becerilerine güvenmedikleri de (10: %54,9) görülmektedir.

Öğretmen adaylarından kararsızım ifadesini işaretleyenlerin azınlıkta olup, çoğunluğun ise ifadelerine katılma bakımından zıt görüşlerde olduğu maddeler Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4

*Öğretmen Adaylarının Zıt Görüşlere Sahip Oldukları Maddelerin Frekans ve Yüzde Dağılımları*

| Madde No | Tamamen katılıyorum | | Katılıyorum | | Kararsızım | | Katılmıyorum | | Kesinlikle Katılmıyorum | | Ort |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | f | % | f | % | f | % | F | % | f | % | |
| 3 | 24 | 13 | 55 | 29,9 | 23 | 12,5 | 65 | 35,3 | 17 | 9,2 | 3,02 |
| 6 | 43 | 23,4 | 39 | 21,2 | 15 | 8,2 | 66 | 35,9 | 21 | 11,4 | 3,09 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 42 | 22,8 | 43 | 23,4 | 20 | 10,9 | 59 | 32,1 | 20 | 10,9 | 3,15 |
| 14 | 32 | 17,4 | 44 | 23,9 | 35 | 19 | 56 | 30,4 | 17 | 9,2 | 3,09 |
| 17 | 27 | 14,7 | 41 | 22,3 | 51 | 27,7 | 53 | 28,8 | 12 | 6,5 | 3,09 |
| 18 | 52 | 28,3 | 36 | 19,6 | 37 | 20,1 | 39 | 21,2 | 20 | 10,9 | 3,33 |
| 20 | 23 | 12,5 | 55 | 29,9 | 34 | 18,5 | 59 | 32,1 | 13 | 7,1 | 3,08 |

Tablo 4 incelendiğinde anketin 3, 6, 8, 14, 17, 18, 19 ve 20. maddelerinin ifadelerine katılma bakımından kararsız olan öğretmen adaylarının azınlıkta kaldığı, çoğunluğun ise bu maddelerin ifade ettiği görüşlere katılma bakımından zıt görüşlerde oldukları görülmektedir. Görüş ayrılığının ortaya çıktığı maddeler; bir sonucu örneklerle göstermenin neden doğru olduğunu anlamaya yardımcı olmayacağı (3: %42,9-%44,5), önceden ispatlanmış olan sonuçların derste tekrar ispatlanmasının gereksiz olduğu (6: %44,6-%47,3), doğruluğu açık olan sonuçların ispatlanmasının gereksiz olduğu (8: %46,2-%43), teoremi bilmenin ispattan daha önemli olduğu (17: %37-%35,3) ve ispatların sıkıcı olduğu (18: %47,9-%32,1) olarak tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları ispatları anlamada zorlanma (14: %41,3-%35,3), ve ispatı ancak hoca yapınca anlayabilme (20: %42,4-%39,2) konularında da birbirlerinden ayrılmaktadırlar.

## Öğretmen Adaylarının Temsili İspata Yönelik Görüşleri

Bu bölümde öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerden elde edilen bulgulara yer verilecektir. Görüşme kayıtlarının analizi sonucu ortaya çıkan temalar şu şekildedir: "*Etkinlikle ilgili genel düşünceler", "formal ispat ile karşılaştırma", "bilinen bir sonucun temsili ispatının gerekliliği", "anlaşılabilirlik", "duyuşsal değerlendirme", "inandırıcılık", "açıklayıcılık", "kendi kendine ispat yapabilme", "önermeyi bilmenin mi yoksa onu ispatlamanın mı daha önemli olduğu".* Bulgular ortaya çıkan bu temalar çerçevesinde sunulacaktır.

*Etkinlikle ilgili genel düşünceler*

Temsili ispat etkinliğini genel olarak değerlendirmeleri istenen sınıf öğretmeni adaylarının tamamı etkinliği son derece eğlenceli bulduklarını ifade etmişler ve bunun nedeninin de temsili ispat etkinliğinin grup çalışması şeklinde düzenlenmiş olması, sürece aktif olarak katılmış olmaları ve görselleştirme gibi unsurlar olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmen adaylarının bu ispat etkinliğinde görsel ve somut öğelerin yer almasının anlamayı kolaylaştırdığı, ezberi engellediği ve kalıcılığı artırdığı konusunda hemfikir oldukları görülmüştür. Bunun yanında iki öğretmen adayı ileride öğrencileri için bu tür etkinliklerin son derece yararlı olabileceğine dikkat çekerken, bir diğeri de bu etkinliğin matematikle yaşam arasındaki ilişkiyi görmeye yardımcı olacağını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarından birinin etkinliği genel olarak değerlendirirken kullandığı ifadelere aşağıda yer verilmiştir:

*"Üniversite öğrencisi olarak küp dediği zaman insanın direk aklına sadece bir küp gelir, ama biz hani o parçalarla uğraştık tek tek o küpün içinde de aslında birçok şeyin olduğunu öğrendik. Şu an mesela küp dediğimiz zaman hani benim aklıma sadece bir cisim değil de hani onun içindeki dikdörtgen prizmasıydı ya da atıyorum diğer kısımları geliyor. Bir de sınıf öğretmenliği okuyorsun, bunu küçük bir çocukla, ilköğretim çocuklarına yaptığınızı düşünürseniz onların hayal dünyası yani bizimkinden daha geniş, onların aklında daha farklı şeyler olur, ki hani buda ilerdeki matematik anlayışlarını ya da matematik sevgisini doğal olarak etkiler diye düşünüyorum". (Y4)*

*Formal ispat ile karşılaştırma*

Görüşmelerde öğretmen adaylarından temsili ispatlama etkinliğinin formal ispatlarla genel bir karşılaştırmasını yapmaları istenmiştir. Analizler sonucu öğretmen adaylarının bu ispatlama etkinliğinin formal ispatlardan farklı olarak görsellik, somut yaşantılar ve dokunma yoluyla zihinde canlandırmayı içerdiği ve böylece matematiksel ifadenin mantığını anlamayı sağladığı; formal ispatın ise onları ezberlemeye yönelttiği görüşüne sahip oldukları belirlenmiştir. Bunun yanında öğretmen adayları bu tür ispat etkinliklerinin kalıcılığının formal ispatlarla çalışmaktan daha yüksek olduğu konusunda hemfikir olmuşlardır. Buna gerekçe olarak da kendi çabalarının sonucunu görmüş olmalarını ve süreç içerisinde geçirdikleri somut yaşantıları göstermişlerdir. Örnek olarak öğretmen adaylarından birinin bu konudaki görüşleri şu şekildedir:

*"Görsel olarak görmek daha kalıcı oluyor, hani ne biliyim onu kendim yaptığım için bir de o daha kalıcı oldu bende, kendim yaptım ne olduğunu biliyorum, onları birleştirince bir de ortaya çıkan şeyi de gördüm, yani sonucunu alınca insan daha mutlu oluyor. Diğerinde de sonucu alırız ama orda nasıl deyim yazarak ispatlamaya çalışıyoruz belli bir şeyleri görmüyoruz yani ha bu böyle ispatlanıyor ama hani şey gibi görsel olmadığı için küp gibi, tamam görsel olamaz da ama" (D1)*

İspat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketinden yüksek puan alan bir öğretmen adayı ise formal ispatın da nedenleri anlamayı sağladığı için önemli olduğunu ancak formal ispatların herkese hitap edemediğini, somut modelden yararlanılarak yapılan temsili ispatlama etkinliğinin her seviyeye uygun olduğunu şu ifadelerle dile getirmiştir:

*"Her zaman insanoğlu görsel şeyleri eskiden beri daha çok akılda kalıcı olmuştur, renklerdi dokunmak, hani dokunmak ve görmek hafızada daha kalıcı bir iz bırakıyor hani şekil, her seviyedeki insana hitap edebilir. Mesela o yaptığımız küp bizim üniversite öğrencilerine de hitap edebilir, ilkokul çocuklarına da hitap edebilir. Ama diğer derste yaptığımız ispatlar daha çok daha bir üst seviye demeyim de hani daha matematiksel terim olan bir ispat ama hani onu da nerden geldiğini bilmek o da güzel, düşündürüyor yani hani insanı, düşünmek de güzel bir şey." (Y4)*

*Bilinen bir sonucun temsili ispatının gerekliliği*

Görüşmelerde ispatla ilgili ankete paralel olarak, öğretmen adaylarının önceden beri bilinen bir gerçeği temsili ispat yardımıyla ispatlamanın yararlı olup olmayacağı konusundaki görüşleri alınmıştır. Bu konuda gerek böyle bir durumda formal ispatın gereksiz olduğunu düşünen ve anketten düşük puan alan öğretmen adaylarının, gerekse yüksek puanlı olanların temsili ispat etkinliğinin ispatlanacak sonuç önceden bilinse bile yararlı olacağını düşündükleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının en çok vurguladığı yararlar daha iyi anlamayı, anlamlandırmayı, zihinde canlandırmayı, yeniden keşfetmeyi sağlama ve ezberi engelleme, hatırlamayı kolaylaştırma olarak belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarından ikisinin bu konudaki düşüncelerine yer verilmiştir.

*"Şimdiye kadar dediğim gibi ezber şeklinde oldu ama ben küp açılımının bu şekilde oluştuğunu gerçekten hani sadece yani bu böyledir diyerek düşünüyordum ama küpü gerçekten hani küpü yaptıktan sonra görünce gerçekten böyleymiş dedim şaşırdım hatta parçalar birleşince bu kadar net bir sonuç beklemiyordum". (D3)*

*"Ezber adı üstünde ezberlediğin zaman unutuyorsun, ama onu unutman imkânsız bir şey yani dediğim gibi dokunuyorsun, görüyorsun ve bizzat bunu sen uyguluyorsun tıpkı şey gibi sanki o kural daha önce bulunmamış da hani onu o gün sen bulmuşsun gibi, hani o yüzden akılda kalıcılığı oluyor". (Y4)*

Bir öğretmen adayı arkadaşlarından farklı olarak bu tür ispatlama etkinliklerinin kendi öğretmenlik yaşamları sırasında küçük yaştaki öğrencilere verebileceği katkıyı şu şekilde dile getirmiştir:

"*Birde sınıf öğretmeni olacağız biz daha küçük çocuklarla uğraşacağız. O yüzden onlara uygulamalı olarak gösterdiğimizde onlar da daha iyi anlar eminim hani şimdi kendimiz böyle daha iyi anlıyorsak eğer, daha eğlenceli oluyor bir de ders". (D5)*

*Anlaşılabilirlik*

Görüşmelerde öğretmen adaylarından anlaşılabilirlik yönünden formal ispatları ve temsili ispat etkinliğini karşılaştırmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının tamamı somut modelin kullanıldığı temsili ispat etkinliğinin daha anlaşılır olduğu görüşündedir. Bunun nedenlerini de görselleştirmeyi sağlama ve kendilerinin gösterdiği yoğun çaba olarak açıklamışlardır. Ancak iki öğretmen adayı bu tür bir etkinliğin her türlü ispat için mümkün olmayacağını da görüşlerine ilave etmiştir. Bunun yanında bir öğretmen adayı da ispatların anlaşılabilmesi için, formal ispatın da gerekli olduğunu ancak görsel olarak desteklenmesinin daha anlaşılır olmayı sağlayacağını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarından birinin bu konudaki düşüncelerini yansıtan ifadelerine aşağıda yer verilmiştir.

*"....Sözlü ispatta havada kalıyor biraz, benim adıma söylediğim zaman şekilde bir şekille uğraşılıyor o şekle o yazdığımız ispatın formülünü o şeklin üzerine yerleştirdiğimiz zaman net bir şey ortaya çıkıyor… hoca geçiyor tahtaya anlatıyor diyor ki bu böyledir sen bir düşünüyorsun bu neden böyle yani bu nasıl oluyor, insan havada kalan şeyleri de bazen algılayamıyor. En azından ben kendi adıma ben algılayamıyorum bazen ama şekle döktüğümüz zaman ha bu bunun için böyleymiş bu şekilde bu görüntüyü oluşturduğu için böyleymiş". (D2)*

*Duyuşsal değerlendirme*

Öğretmen adaylarının $(a+b)^3$ özdeşliğinin temsili ispatı için model geliştirerek bu model yardımıyla ispatlama etkinliğini sevip sevmedikleri, sıkıcı bulup bulmadıkları ve bunun nedenleri konusundaki görüşlerine bakıldığında tamamının görüşünün olumlu yönde olduğu görülmüştür. Etkinliği eğlenceli bulan öğretmen adayları bunda rol oynayan başlıca unsurlar olarak; etkinliğin grup çalışması şeklinde olmasını, etkinlikte kendi çabalarının sonucunu görmüş olmalarını, süreçte zihinsel ve fiziksel olarak aktif olmalarını, ilk defa böyle bir etkinlik yapmış olmalarını ve yapılan ispatın ezbere yönelik olmayışını dile getirmişlerdir. Bir öğretmen adayı ise bu ispatlama etkinliğini anladığını ve bunun için sevdiğini, formal anlamda yapılan ispatları anlamakta zorlandığı için sevmediğini ifade etmiştir. Bunun yanında bir öğretmen adayı da somut model yardımıyla ispatı öğretmenlik yaşamında kullanabileceği güzel bir etkinlik olarak değerlendirmiştir. Öğretmen adaylarının bu konudaki düşüncelerine dair bir örneğe aşağıda yer verilmiştir.

*"Sıkıcı değildi çünkü sen bir şeyin içindesin faaliyet halindesin tek bir kişiye bağlı değil sen de bir şeyler yapıyorsun onu anlamak için enerji sarf ediyorsun sadece şekilde de kalmıyor düşünüyorsun bunu nasıl koyacağım nasıl bu formülü uygulayacağım bu şekilde iki*

*taraflı çalışmış oluyor hem beyin hem de vücut olarak. Zaman zevkli geçiyor yani monotonluk olmuyor". (D2)*

*İnandırıcılık*

Formal anlamda ispat ve temsili ispatın inandırıcılık bakımından karşılaştırılmasıyla ilgili görüşleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının büyük bölümünün temsili ispatlama etkinliğini daha inandırıcı buldukları görülmüştür. Öğretmen adayları bunun en önemli nedeninin bu ispatın görsel olması, somut bir şekilde yapılması ve dokunarak kontrol edebilmeyi sağlaması olduğunu ifade etmişlerdir. Bunun yanında bazı öğretmen adayları, hoca tarafından yapılan ispatlarda akılda soruların kalabildiğini, buna ne gerek var sorusu oluşabildiğini, somut modelle göstermenin ispatı çizimle açıklamaktan daha etkili olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının temsili ispatın inandırıcılığıyla ilgili düşüncelerini gösteren bazı örnek ifadelere aşağıda yer verilmiştir.

*"Kesinlikle görsellik inandırıcı. Çünkü birebir yaptığımız şekilleri ölçerek ve birbirine monte eder gibi yerleştirerek arkadaşlarımıza birebir gösterdik mesela sunumunu yaptık yani görsel olarak da herkes inandı ve inandırıcılığını da kanıtlamış olduk hiçbir şey kalmadı öyle yani pürüz, kimse nasıl oldu diyemedi, birebir ölçtük santimlerini falan hep hesapladık".(Y3)*

İspatla ilgili görüş anketinden düşük puan almış olmasına rağmen, iki öğretmen adayı ise formal ispatın ve somut model kullanarak ispatın aynı ölçüde inandırıcı olduğunu aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir.

*"İkisi de inandırıcıdır bence. Sonuçta onda da matematiksel bir işlem yapıyoruz belirli şeyler var hani herkesçe kabullenilmiş o işlemlerin sonucudur, o da inandırıcıdır, onda da şüphe yoktur".(D3)*

*"Biri yazılı biri görsel ya, görsel olan bana daha çekici geliyor, yani şey geliyor hani daha kanıtlayıcı geliyor, tamam yazılı olanı da anlıyoruz bir nevi ama görsel olan daha kalıcı oluyor bende. Aslında ikisi de inandırıcı ama görsel daha bir çekici geliyor". (D1)*

*Açıklayıcılık*

Öğretmen adaylarının temsili ispat etkinliğinin olguları açıklayıcılık yönüyle ilgili görüşlerine bakıldığında temsili ispatın görselleştirme ve somut deneyimler sağlaması, ayrıca neyin nereden geldiğini anlamaya yardımcı olması nedeniyle bu ispat etkinliğini formal ispatlardan daha açıklayıcı buldukları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından birinin bu konudaki görüşlerine aşağıda yer verilmiştir:

*"Böyle daha açıklayıcı, neden mesela burada iki tane küp oluşturduk birimleri farklı olan, üçer tane de yine farklı dikdörtgenler prizması oldu yani hani diğer açılımda işte a küp artı üç a kare b falan şeklinde yazdığımız zaman hani o aradaki diğer dikdörtgenler prizmasının nerden geldiği tam olarak algılanmıyor ya da işte neden bu parçaları birleştirdiğimiz zaman böyle oluşuyor diye hani sadece sayılar olduğu için onu tam birbirine çözemiyorsunuz. Yani hani neden oldu bir küp nasıl bu şekilde parçalara ayrıldı falan diye ama onu biz kendimiz kesip yapıştırdığımız zaman, böyle parçaları birleştirdiğimiz zaman görüyoruz yani hani gerçekten de bu bu parçalardan oluşuyormuş diye. Tamam, matematiksel yolla ispat oluyor ama açıklayıcılık yönünden böyle daha açık bence". (Y1)*

*Kendi kendine ispat yapabilme*

Temsili ispatı kendi kendilerine yapabilme yönünden değerlendirmeleri istenilen öğretmen adayları böyle bir etkinliğin formal ispat yapmaya göre daha kolay olduğu görüşündedirler. Formal ispatlardaki adımları kendi kendilerine takip edebilmenin zor olduğunu, daha üst düzey düşünme becerilerinin gerekli olduğunu ifade eden öğretmen adayları, somut model geliştirerek temsili ispatlama etkinliği için yol göstermenin, rehberliğin gerekli olduğunu da belirtmişlerdir.

*Önermeyi bilmenin mi yoksa onu ispatlamanın mı daha önemli olduğu*

Bir önermeyi bilmenin mi yoksa onu temsili formda ispatlamanın mı daha önemli olduğu sorusuyla ilgili yanıtlar incelendiğinde; öğretmen adaylarından beşinin temsili formdaki ispatlama etkinliğinin anlamlı öğrenmeyi sağlayarak ezberi engellediği için daha gerekli ve önemli olduğu görüşünde oldukları görülmüştür. Bu beş öğretmen adaylarından üçü ispatla ilgili görüş anketinden yüksek, ikisi ise düşük puan almışlardır. Öğretmen adaylarının bu konudaki düşüncelerini yansıtan bir örneğe aşağıda yer verilmiştir.

*"Bence matematiğin ezber olduğu anlayışının yıkılması için bilmenin yanında ispatında olması gerektiğini düşünüyorum. Böyle ispatlamak (temsili olarak) daha da önemli çünkü insan bildiği şeyleri uygulayabilmeli bu yani uygulama aşaması yoksa mesela bir şeyleri muhakkak biliyoruz öğreniyoruz bu aslında ezber gurubuna giriyor ama uygulamak öğrenmek grubuna giriyor bence". (Y3)*

Öğretmen adaylarından dördü Türkiye'deki sınav sistemine dikkat çekerek, sınavlar düşünüldüğünde bir önermeyi bilmenin onu temsili formda ispatlamaktan daha önemli olduğunu ancak matematiği anlayarak öğrenmek amaçlandığında ispatları bu yöntemle destekleyerek açıklamanın daha önemli olacağını belirtmişlerdir. Tamamı ispatla ilgili görüş anketinden düşük puan almış olan bu öğretmen adayları, sınavlara hazırlanmakta olan öğrenciler için bu tür etkinliklerin zaman kaybı olacağı görüşündedir. Öğretmen adaylarının birinin bu konudaki düşüncesine aşağıda yer verilmiştir.

*"Şimdi a+b'nin küpünün işte a küp artı üç a kare b olduğunu bilmek bizim şu an eğitim durumumuzda daha bir cazip geliyor. Çünkü biz zamanla yarışan insanlar olarak geldik buraya hiç ona gerek yok direk biz ezberledik onu yazdık öyle. Ama bakılırsa bir şeyin neden böyle olduğunu bilmek daha önemlidir. Matematiği öğrenmek açısından bu daha önemli çünkü dediğim gibi beyinde bir şey oluşuyor o somut bir şey oluşuyor, yaptığımız küp beyinde de oluşturuyor kendini". (D2)*

Sadece bir tane öğretmen adayı ise asıl olanın formal ispat olduğunu, ancak onu daha iyi anlayabilmek için temsili ispatlama etkinlikleriyle desteklemenin yararlı olacağını şu şekilde ifade etmiştir:

*"Önemli değil diyemem önemli tabi de yani sadece bu da yeterli değil görsel olarak bir şeyi ispatlamak da yeterli değil matematiksel yolların da bilinmesi gerekiyor. Hani o da çok sağlam ki bence asıl olan o yani hani bir şeyi matematiksel ispatı vardır açıktır onu farklı şekillerde ispat edersin görsel yolla şöyle açık olan dedik ama hani ben işte şey yaparım sadece küplerle çekerim yaparım bu şekilde ispatlarım görsel yol benim için yeterlidir diyemem ben kendi adıma çünkü matematiksel yolların kesinlikle bilinmesi gerekiyor, ama bunun da bir önemi var çünkü bu da elde edilen daha doğrusu bilinen şeyin hani daha açık bir şekilde gösterilmesini sağlıyor. Zihinde netleştiriyor yani". (Y1)*

## Sonuç, Tartışma ve Öneriler

İspat ve ispat yapmaya yönelik görüş anketinden elde edilen verilerin analizinde sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel bir sonucun doğruluğuna inanmada, matematiksel olguları açıklamada ispatın önemli ve gerekli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Öğretmen adayları ispatın matematik için öneminin ve vazgeçilmezliğinin farkındadır. Ancak buna rağmen adayların büyük bölümünün de zaten ispatlanmış önermeleri kendilerinin ispatlamaya çalışmasının gereksiz olduğunu düşündükleri, ispat yapmayı sevmedikleri, sıkıcı buldukları ve ispat yapma konusunda kendilerine güvenmedikleri belirlenmiştir. Görüşmelerde öğretmen adaylarının belirttiği gibi, hoca tarafından tahtada yapılan ispatların anlaşılamaması ve öğretmen adaylarının ezbere yönelmesi bu tür olumsuz düşüncelerin oluşmasında etken olabilir. Bu durum Türker ve arkadaşlarının (2010) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yaptıkları çalışmalarında ulaştıkları sonuçlara paralellik göstermektedir. Bu olumsuzluğu gidermek amacıyla Tall'un (1999) önerdiği gibi matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin, bireylerin bilişsel gelişimine uygun farklı ispat türlerinin kullanımını dikkate almaları yararlı olabilir.

Anketteki "*matematikte sadece örnekler yardımıyla bir şeyin doğru olup olmadığını anlayabiliriz*" (madde 5) ifadesine öğretmen adaylarının dörtte biri katılırken, "*bir sonucun örneklerle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz*" (madde 3) ifadesine % 44,5 i katılmamaktadır. Bu durum sınıf öğretmeni adaylarının, teyit edici örnekleri ispat olarak kabul ettiklerini belirten bazı çalışmaların bulgularıyla örtüşmektedir (Gholamazad, ve diğ, 2003; Martin ve Harel,1989). Bu durumdaki öğretmen adaylarına iyi seçilmiş örneklerin ispat olamayacağı düşüncesini kazandırmak için, temsili formdaki ya da Tall'un (1999) önerdiği farklı düzeylerdeki informal ispat etkinlikleriyle çalışırken sıkça "neden, niçin" sorularını yönelterek düşüncelerini açıklamak ve karşılarındakini ikna etmek için çeşitli argümanları kullanma gereksinimi oluşturmak yararlı olabilir. Bunun yanında Gholamazad'ın (2007) denediği ve yararını gördüğü, içinde düşünmenin ve ikna etmenin ön plana çıktığı ispat diyalogları yazma etkinliklerden yararlanılabilir.

Gerek anketten gerekse görüşmelerden elde edilen bulgular göz önüne alındığında öğretmen adaylarının önemli bir kısmının bilişsel yapılarının en temel ispat düzeyi (Tall, 1999) olan temsili ispata daha uygun oldukları anlaşılmaktadır. Bu düzeydeki öğrencilerin üniversite düzeyinde aniden (gerekli basamaklara hiç uğramadan) formal anlamda ispatla karşılaşmaları onları ezberlemeye yönlendiriyor olabilir. Bu durum literatürde yer alan (Balacheff, 1988; Healy ve Hoyles, 2000; Sowder ve Harel, 1998; Turker ve diğ., 2010) öğrencilerin formal ispata geçiş sürecinin ani ve sert oluşunun yol açtığı olumsuzluklardan biri olarak kabul edilebilir. Bu sert geçişi önlemek amacıyla öğrencilerin bilişsel gelişimine uygun farklı informal ispat türlerinin (Tall, 1999; Ball ve diğ.,2002) kullanımını da dikkate alarak formal ispata geçişin daha doğal bir şekilde gerçekleşmesi sağlanabilir. İspatı matematik eğitimine yerleştirme çabası hem öğretmenleri hem de öğrencileri zorlamaktadır. Bunun bir nedeni de küçük yaşlarda ispatın öncüsü olan informal ispat ekinliklerine gereken önemin verilmemesi olabilir. Bu nedenle ilkokul yıllarında ispat kavramına giriş olarak somut modellerin kullanıldığı, görselliği ve fiziksel hareketi içeren temsili ispatlardan bu anlamda yararlanılabilir.

Moralı ve arkadaşlarının (2006) ilköğretim matematik öğretmen adaylarına bu çalışmada kullanılan ölçeği uygulayarak elde ettiği bulgularla çalışmanın bulguları karşılaştırıldığında sınıf öğretmeni adaylarından ispat yapmayla ilgili olumlu ve aynı zamanda olumsuz görüşe sahip olanların daha fazla oranda oldukları görülmüştür. Puan durumu orta düzeyde olan ve kararsızlar olarak kabul edilebilecek sınıf öğretmen adaylarının oranı ise matematik öğretmeni adaylarının yarısı kadardır. Bu durum sınıf öğretmen adaylarının daha az yoğunlukta ve daha kolay ispatlarla karşılaşmalarının, orta öğretimden gelirken getirdikleri matematik alt yapılarının daha zayıf olmasının ve ispat yapma yönünde kendilerini matematik öğretmen adayları düzeyinde sorumlu kabul etmemelerinin bir sonucu olabilir. Yine Moralı ve arkadaşlarının (2006) çalışmalarında ulaştıkları "*öğretmen adaylarının ispatın teorik matematik için vazgeçilmez olduğu*" görüşüne sahip olmalarına rağmen, "*açıkça doğru olduğu görülen sonuçların ispatlanmasının gereksizliğine inandıkları*" bulgusu bu çalışmada da ortaya çıkmıştır.

Görüşmelerin analizinde formal ispata yönelik gerek olumlu gerekse olumsuz görüşe sahip öğretmen adaylarının, ispatların mümkün olduğu sürece somut deneyimleri ve görselliği içeren temsili ispatlarla desteklenmesi gerektiği, bunun oldukça eğlenceli olduğu ve anlamlı öğrenmeye, kalıcılığa, matematiği sevmeye katkı sağlayacağı görüşünde oldukları belirlenmiştir. Bu bulgular Knuth'un (2002) tecrübeli lise matematik öğretmenleriyle yaptığı çalışmada ulaştığı "*öğretmenlerin tamamı informal ispatı orta öğretim matematiğinde merkezi bir fikir olarak düşünmekteler, onlara göre bu fikir her öğrenci için uygun olarak görülmekte ve her dersin içine entegre edilmesi gerekmekte*" bulgusuyla paralellik göstermektedir. Bu durum informal ispatın, matematikte ve matematik eğitiminde çok önemli bir değere sahip olan kesin ispatın (rigorous proof) yerini alması gibi bazı riskleri barındırsa (Hanna 1995; Wu, 1996) da, öğretmen adaylarının bu görüşleri eğitim alanındaki birçok temel teori ile paralellik göstermektedir (Bruner, 1966, 2006; Dienes ve Golding, 1971; Piaget, 1971; Skemp, 1987). Ancak yine araştırmalar göstermektedir ki somut materyallerden yararlanmanın teorik olarak öğrenmeyi desteklediği kabul edilmekle beraber, uygulama her zaman teoriyi destekler nitelikte değildir (Fuson ve Briars, 1990; Raphael ve Wahlstrom, 1989; Clements, 1999). Araştırmacılar bu durumu ortaya çıkaran önemli bir etkenin öğretmenlerin bu konudaki bilgi, inanç ve deneyimleri olduğunu belirtmektedir. O halde sınıf öğretmeni adaylarının üniversite eğitim yaşamları süresince matematik öğretiminde somut modellerden yararlanma konusunda gerekli bilgi, inanç ve deneyimi kazanması için çaba sarf edilmelidir. Bu amaçla matematik ve matematik öğretimi derslerinde yeri geldikçe somut model kullanımının yanında fiziksel hareket ve sözel desteği de içeren temsili ispatlama etkinliklerine yer verilebilir. Böylece sınıf öğretmeni adayları ispat oluşturma süreci içine dâhil olmaları için teşvik edilmiş olacaklardır.

Sınıf öğretmeni adayları temsili ispatta kullanılan somut modelin geliştirilme sürecinin çok fazla zaman alması, fazla el becerisi gerektirmesi gibi sınırlılıklara değinmişlerdir. Ancak bu görüşlerini ifade ederken Türkiye'deki sınav sistemini dikkate aldıklarını da eklemişler, sınavlara hazırlanma sürecinde zamanla yarışıldığına dikkat çekmişlerdir. Öğretmen adaylarının sınav sistemini göz önünde bulundurarak farklı yaklaşımları kullanmakta tereddüt yaşaması kaygılandırıcı bir durum olarak görülebilir.

Öğretmen adaylarının görüşmelerde sınav için formal ispatları ezberlediklerini ifade etmeleri sınavlarda ispatlamaya yönelik soruların niteliğine dikkat etmenin gerekliliğini ortaya koymaktadır. Ezberleyip yazabilecekleri hazır bir ispatı yapmalarını istemek yerine farklı alternatifler devreye sokulabilir. Ayrıca geleneksel yöntemlerle verilecek bir matematik eğitimi de onların matematiksel ispatların sıkıcılığı ve gereksizliği yönünde görüş oluşturmalarına neden olabilecek ve sınavlarda yazabilmek için ispatları ezberleme yolunu tercih etmeye yönlendirecektir. Bu şekilde yetişecek öğretmen adaylarının, görevlerini yaparken öğrencilerine matematiksel olguları gerçekleme, temellendirme ve anlamlandırma için gereken öğretim ortamını oluşturmakta zorlanma olasılığı yüksek olacaktır.

Öğretmen adaylarının büyük bölümü somut modellerin kullanıldığı, fiziksel hareketi içeren ve sözel ve görsel desteği gerektiren temsili ispatlama etkinliğinin formal yollarla yapılanlardan daha inandırıcı ve açıklayıcı olduğu görüşündedir. Formal anlamda ispat yapmaya yönelik olumlu yönde görüşe sahip öğretmen adayları da ispatların mümkün oldukça bu formdaki etkinliklerle desteklenmesinin yararlı olacağını ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adaylarından bir kısmı matematikte asıl olanın formal anlamda ispatlar olduğunu vurguladıktan sonra, anlamlı öğrenmenin, öğrencilere matematiği sevdirmenin sağlanabilmesi için bu tür ispatlardan yararlanmanın öneminin de altını çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının formal anlamda ispat yapmaya göre daha temel bir seviyede yer alan temsili ispatı sevmeleri onları mesleklerine hazırlamak için bir fırsat olarak değerlendirilebilir. Çünkü onların hitap edecekleri öğrenciler de ispat bakımından en temel düzeyde bulunan öğrencilerdir. Ayrıca öğretmen adayları bu araştırma kapsamında yapılan görüşmelerde öğretmenlik yapmaya başladıklarında bu tür etkinliklerden yararlanma konusunda olumlu bir tutum içerisinde olduklarını gösteren ifadeler kullanmışlardır. Ancak her ne kadar öğretmen adaylarının bir kısmı bu tür ispat etkinliklerinin formal ispatın yerini alamayacağının farkında olsalar da, Martin ve Harel'in (1989) da ifade ettiği gibi, büyük bölümü bu tür ispatlama etkinliklerini de kesin ispat kabul edebilme hatasına düşebilecek bir zihinsel yapıda görünmektedir. Bu nedenle bu tür ispatlama etkinlikleri düzenlenirken, bu etkinliklerin matematikte kesin ispat olarak kabul edilip edilemeyeceği konusundaki sınıf tartışmalarına da yer verilebilir. Aksi takdirde bu sınıf öğretmenlerinin ileride rehberlik edecekleri öğrencilerin de bu tür ispatlama etkinliklerinin formal ispatlarla özdeş olduğu gibi yanlış bir inanç geliştirmelerine neden olabilir ve dolayısıyla da lise yıllarındaki geometri ve matematik derslerinde ispat fikrinin onlara zor gelmesi gibi istenmeyen bir durum oluşabilir (Martin ve Harel, 1989). Wu'nun (1996) ifade ettiği gibi informal ispat biçimlerine önem vermek, düşük seviyedeki matematik sınıfları için uygun olsa da doğru matematiksel akıl yürütme (yani kesin ispatın) öğretiminin yerini almaktan çok formal ispat için bir tamamlayıcı, katkı sağlayıcı olarak ele alınması yerinde bir tutum olacaktır.

Görüşmeye katılan öğretmen adayları bilinen bir sonuç ya da önermenin temsili formda ispatının gerekli ve yararlı olduğunu, bu tür etkinliklerle "nasıl?" sorusunu yanıtlayarak matematiksel ifadeyi anlamlandırdıklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle temsili ispatlama etkinlikleri öğrencilerin, ispat fikrinin gelişiminde önemli bir yeri olan, "neden?", "niçin?" sorularını sorma ve cevaplama gereksinimini kazanmada yardımcı olabilir. İspat konusunda birçok öğrencinin temel probleminin verilen bir ifade için bir argüman sunmayı genellikle gerekli görmeme olduğu düşünüldüğünde (Harel, 1998) bu konuda öğrenciler için sağlanacak destek, formal ispat fikrini kabul etmeye geçişlerini kolaylaştırabilir. Görüşmelerde öğretmen adayları somut olarak görme ve dokunarak kontrol edebilme olanağı sağladığı için temsili ispatlama etkinliklerini daha inandırıcı ve açıklayıcı bulduklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle ispatı bir ikna argümanı olarak düşündüğümüzde temsili ispatlama etkinlikleri kesin matematiksel ispatlara hazırlamaya katkı sağlayabilir nitelikte görünmektedir.

Özetle araştırmada elde edilen bulgulardan hareketle sınıf öğretmeni adaylarının üniversite eğitimi süresince alacakları matematik ve matematik eğitimi derslerinde karşılaşacakları matematiksel ispatları mümkün olduğunca anlamlandırarak öğrenmelerine olanak sağlanmalıdır. Bu amaçla derslerde görselleştirme ve somut modellerin kullanımını içeren informal ispatlama biçimlerine de yer vermeye özen gösterilmelidir. Ancak bunu yaparken informal ispat türlerinin formal ispatmış gibi algılanmasına veya onun yerini almasına yol açmaktan kaçınma konusunda da dikkatli olunmalıdır. Meslek yaşamlarına adım atmaları ile birlikte hitap edecekleri yaş aralığı göz önüne alınırsa matematikteki önermelerin neden doğru olduğu konusunda öğrencilerini ikna edebilmek için çeşitli formatlardaki argümanlardan yararlanabilme deneyimlerini artırmak sınıf öğretmeni adayları için son derece önemlidir. Buradan hareketle sınıf öğretmeni adaylarının eğitimleri süresince, temel matematik ve matematik öğretimi gibi derslerde, matematiksel ilişkileri, önermeleri açıklarken somut modellerden yararlanarak temsili ispatlar yapma gibi farklı ispatlama deneyimleri yaşamaları önemsenmelidir.

## Kaynakça

Almeida, D. (2001). Pupils' Proof Potential, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-60.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Arslan, Ç. (2007). İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social İnteraction: The Case of Mathematical Proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen ve J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (175–192). The Netherlands: Kluwer AcademicPublishers.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, Hodder and Stoughton, London, pp. 216–235.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. and Movshovıtz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III). Beijing: Higher Education Press, pp. 907–920.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Belknap Press.

Chazan, D. (1990). Quasi-Empirical Views of Mathematics and Mathematics Teaching. *Interchange,* 21(1), 14–23.

Clements, D. H.(1999). 'Concrete' Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, Vol. 1, No 1, 45-60.

De Villers, M. (1990). The Role and Function of Proof With Sketchpad. *Pythagoras*, vol.24, p.17 -24.

Dienes, Z. P. and Golding, E. W. (1971). *Approach to Modern Mathematics.* New York: Herder and Herder.

Francis, G. (1996). Mathematical Visualization: Standing At the Crossroads. Retrieved March 15, 2013, from http://www.oldweb. cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html .

Fuson, K. C. And Briars, D. J. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning / Teaching Approach for First and Second Grade Placevalueand Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 180–206.

Gholamazad, S. (2007) . Pre-service Elementary School Teachers' Experiences with the Process of Creating Proofs. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. ve Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 265-272. Seoul: PME.

Gholamazad, S., Liljedahl, P. and Zazkis, R. (2003). One Line Proof: What Can Go Wrong? In N.A. Pateman, B. J. Dougherty, and J. Zilliox (Eds.), *Proceedings 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 437-444, 13-18 July, 2003, Honolulu, HI.

Güler, G., Özdemir E. ve Dikici, R., (2012). Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tümevarım Yoluyla İspat Becerileri Ve Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri**.** *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 20(1), 219-236.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.

Hanna, G. (1995). Challenges to The Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics,* 15(3), 42–49.

Hawkins, M. (2007). T*eaching Geometric Reasoning: Proof by Pictures*, Unpublished Master Thesis, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, USA.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.

İskenderoğlu, T.A., Baki, A. ve Palancı, M. (2011). Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği: Geçerlik ve Güvenirlik Çalışması, *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi,* 5(1), 181-203.

Jones, K. (2000). The Student Experience of Mathematical Proof at University Level, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 31, no.1, p. 53 -60.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics*, Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, 1, 61-88.

Martin, W. G. and Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(1), 41–5

Mejıa-Ramos, J. P. (2005). Aspects of Proof In Mathematics Research. Hewitt, D. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 25(2), 61-66.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, S. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapamaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.

Natıonal Councıl of Teachers of Mathematıcs [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Palais, R.S. (1999). The Visualization of Mathematics: Toward a Mathematical Exploratorium. Notices of the AMS 46(6), 647-658

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge.* Chicago: The University of Chicago Press.

Raphael, D. and Wahlstrom, M. (1989). The Influence of Instructional Aids on Mathematics Achievement. *Journal for Researchin Mathematics Education*, *20,* 173-190.

Sarı, M., Altun, A.ve Aşkar, P. (2007). Undergraduate Students' Mathematical Proof Processes in a Calculus Course: A Case Study. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(2), 295-319.

Schoenfeld, A. (1994). What Do We Know About Mathematics Curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55–80.

Selden, J., and Selden, A. (2009). Understanding The Proof Construction Process. In F.-L Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, ve M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference*: *Proof and Proving in Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 196-201). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sowder, L. and Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *Mathematics Teacher,* 91(8), 670–675.

Stylianides, G. J. (2007a). Investigating the Guidance Offered to Teachers in Curriculum Materials: The Case of Proof in Mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 191-215.

Stylianides, A. J. (2007b). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 65: 1–20.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. and Philippou, G. N. (2007). Preservice Teachers' Knowledge of Proof by Mathematical Induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145–166.

Tall, D. and Mejia-Ramos, J. P. (2006). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof. *Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives,* Universitat Duisburg-Essen, Kasım 1–4, 2006.

Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for All or for Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, vol, 4, pp.117-136. Reston, Virginia: NCTM.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 127-146, New York: Macmillan.

Turker, B., Alkas, Ç., Aylar, E., Gurel, R. ve Akkuş İspir, O. (2010). The Views of Elementary Mathematics Education Preservice Teachers on Proving. *International Journal of Human and Social Sciences(423-427)* 5:7.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119

Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 221–237.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (Göz. Geç. 5. Bs.). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

## Extended Abstract

### Purpose

Proof, which is a process and a method explaining the truth of something or the fallacy of something in mathematics, is an effective learning tool for advancing mathematical understanding. In recent years, the importance and the place of proof in mathematics has been understood more significantly in the field of mathematics education together with the analysis of the students', from different age groups, cognitive processes, ways and development while they are proving. However, the research reveals that students from each level have in difficulty in understanding and doing proof. Two of the reasons of the difficulties that students encounter in their future lives are not putting enough importance on proof and encountering proof abruptly. The idea of incorporating proof into students' mathematical experiences from the beginning of their schooling raises importance of proof in the early grades. Avoiding the negative effects caused by encountering proof abruptly can be possible by incorporating the proof into each level of mathematics education. In this respect, the question of “which kind of proof activities can be designed for elementary students” comes to mind. Students will be able to find an opportunity to conceptualize mathematics and logical thinking more than before if they are given an opportunity to interact with different types of proofs. Visualization is not accepted as a formal proof but it can be a guide for rigorous mathematical proofs.

As it happens in each reform activity related to education, teachers have the most important responsibility in the process of incorporating proof into each level of school mathematics. The strong relationship between the teachers' beliefs and attitudes affects their teaching practices directly. Moving here, much research on the issue of pre-service mathematics teachers’ and teachers' opinions about doing proof have been conducted in recent years. Nevertheless, research did not focus enough on pre-service elementary teachers’ thoughts related to proof. Conducted research has been limited on pre-service primary teachers’ thoughts about formal proof. However, pre-service primary teachers’ views about the proof, their beliefs and attitudes on proof are important even though these teachers do not teach proof as a subject directly. The core resource of students' is teachers because the topic of proof is not enough incorporated into the curriculum. Pre-service primary teachers also have in difficulty on the topic of proof as it happens to other students. At this point, the question of “what can be done for teachers in order to improve their attitudes towards proof positively” emerges. Searching pre-service primary teachers’ thoughts related to different kinds of proof types can contribute to this issue. In this respect, in the current study, identifying the pre-service primary teachers’ thoughts about both formal proof and enactive proof, which is also an informal proof technique and generally appropriate for small children, done through the animation and physical model, including a physical action, visual and verbal support, are aimed.

## Methods

In the study, both quantitative and qualitative methods were used. First, Likert-type opinion survey aimed at mathematical proofs and was applied to all pre-service primary teachers. Then, a concrete development model activity was designed in order to be used for the enactive proof of this model's identity with a group chosen randomly. The studies done by the pre-service primary teachers were recorded. Pre-service primary teachers tried to prove the cube expansion identity to their friends through the way of enactive proof by using the model that was developed by them at the end of the activity. After that, semi-structured interviews were implemented with 11 of the pre-service primary teachers in the group in which these activities were designed.

184 pre-service primary teachers including 149 female and 35 male who were being educated in their first year in the institution took part in the first section of the research. Pre-service primary teachers deserve the right to be educated in this field by participating in an external exam including mathematics questions significantly after completing their high school. Pre-service primary teachers generally have to learn the mathematical rules and applications without reasoning during the process of preparation for the aforementioned external exam. Hence, two things are aimed here: The first one is to examine mathematical concepts that the pre-service primary teachers encounter in their elementary and secondary education more deeply for pre-service primary teachers on the scope of the course "Basic Mathematics" that they take in their first year of education at the institute. The second one is to learn some of the mathematical rules, which the pre-service primary teachers had learned superficially, through searching the causes. An enactive proof activity was designed with a randomly chosen group consisting of 32 pre-service primary teachers out of 184 pre-service primary teachers. Then, semi-structured interviews were designed with 11 pre-service teachers chosen from this group. The views of the seven of the pre-service teachers are negative while the views of the four pre-service teachers are positive.

Pre-service primary teachers were separated into three groups in terms of the level of the positiveness of their opinions aimed at proving based on the scores that they had on the formal proof opinion survey. Additionally, the items that the most of the pre-service teachers approved or not approved were identified by analyzing the dispersion of the percentage and the frequency of the responses that the pre-service teachers gave to the survey items.

In the analysis of the data obtained from interviews, inductive analysis, one of the types of content analysis, was utilized. For this purpose, first, data obtained from the interview was rendered in a written format by the researchers. In the second phase, researchers coded the written data one by one. Later, researchers shared their opinions related to the sections including disagreement by comparing the codes. Then, the themes were constructed in light of common codes.

## Findings

It was revealed that most of the pre-service primary teachers think mathematical proofs both implement and explain the phenomenon, proving a mathematical result is necessary for believing its truth, proofs sometimes involve strategies which are not understood exactly, mathematical proofs are related to other mathematical results and proofs are unavoidable for theoretical mathematics. Additionally, it was found that most of the pre-service primary teachers agree on several issues. For example, working on the phases of the proof helps to understand why it is right, experiencing the different proofs of the theorem helps to understand the issue of proof more than experiencing just one and proving may be seen as problem solving are the issues that the pre-service primary teachers agreed on it. On the other hand, it was understood that most of the pre-service primary teachers do not agree that confirming can only be done with examples in mathematics and mathematical proofs can only be done by the professionals. In addition, it was revealed that more than half of the pre-service primary teachers do not like proving and they are not confident about their proving skills.

All of the pre-service primary teachers evaluated generally the enactive proof activity that was designed on the interviews after the activity. They stated that they found the activity very enjoyable. Furthermore, the reasons that they raised for this opinion are enactive proof activity were designed as a group activity, they participate the activity actively, and factors such as visualization. Additionally, pre-service primary teachers agreed that incorporating the concrete and visual components to this proof activity eases to understand it, prevents the memorization and increases the permanence. Pre-service primary teachers also stated that enactive proving involves mental picture with visualization, concrete experiences and touching, different from the formal proof when enactive proof activity is compared with formal proof. Thereby, mathematical statement provides to understand the logic of it while formal proof causes memorization.

Pre-service primary teachers stated their opinions whether it is useful to prove a known reality with the method of enactive proof or not when they are asked. Here, it was found that both the pre-service primary teachers who received high scores on the survey and who received low scores on the survey think that enactive proof activity is useful even though the enactive proof activity which will be proved later has been known before. The advantages that the pre-service teachers emphasized were identified as to provide understanding make it meaningful, mental picturing, discovering again, easing remembering and preventing memorizing. It was revealed that most of the pre-service primary teachers found the enactive proof activity more understandable, convincing and explanatory when the opinions related to clarity, persuasiveness, being explicative of formal proof and enactive proof were examined. Pre-service primary teachers stated the most important reasons for their opinions as this proof is visual, it is proved concretely, it provides controlling by touching and the intense effort that they make during the proving process. However, two of the pre-service primary teachers stated that both of the formal proof and inactive proof are convincing equally.

Pre-service primary teachers were required to evaluate the enactive proof activity in terms of affective perspective. Thus, pre-service primary teachers stated the factors providing the enactive proof activities were more enjoyable as the activity was designed as a group study, pre-service primary teachers were able to see the results of their efforts, they were active physically and mentally, they encountered an enactive proof activity for the first time and the activity was not aimed at memorization. However, one of the pre-service primary teachers stated that she/he understand the activity so she likes the activity while she/he does not like the formal proof because of not being able to understand the formal proof.

Five of the pre-service primary teachers agreed with the idea of enactive proof activity is more necessary and more important than the formal proof because enactive proof prevents memorizing by providing meaningful learning when the responses related to the question of whether it is important to know a hypothesis or proving the hypothesis in an enactive form. However, some of the pre-service primary teachers stated that knowing a hypothesis is more important than to prove it when the Examination System in Turkey is considered but they stated that explaining the proofs by supporting them with enactive proof activities is more important when learning mathematics with understanding is aimed.

## Conclusion and Suggestions

In the analysis of the data obtained from opinion survey aimed at formal proving, it was found that pre-service primary teachers think proof is important and necessary for explaining the mathematical phenomenon and believing the truth of a mathematical result. Pre-service primary teachers are aware of the importance and indispensability of the proof in mathematics. However, it was identified that most of the pre-service primary teachers think it is unnecessary to prove a hypothesis that was also proved before, pre-service primary teachers do not like proving, they find proving boring and they do not feel confident at proving. Not being able to understand the proofs done by the teachers on the board and aiming at memorization of pre-service primary teachers can be factors on the formation of these kinds of thoughts as the pre-service primary teachers stated in the interviews. For mathematicians and mathematics educators, taking into consideration the use of different proof types appropriate for cognitive development of the individuals can be useful in order to eliminate this negativity.

Findings obtained from the survey demonstrate that pre-service primary teachers accept confirmatory examples as proofs. It can be useful to provide an atmosphere for pre-service primary teachers to explain their thoughts by asking them frequently "why" while they are working with informal proof activities in different levels or representatives of the form. These activities should aim at making pre-service primary teachers understand that well-chosen examples cannot be a proof, and forming a necessity for the use of various arguments in order to persuade the others. Furthermore, the use of writing proof dialogs emphasizing thinking and persuasion can be useful.

Pre-service primary teachers have both positive and negative opinions aimed at formal proof. Furthermore, they agree with the ideas of proofs should be supported by concrete experiences and enactive proofs including visualization, and this is very enjoyable and it contributes to meaningful learning, permanence and the love of mathematics. This situation includes some risks such as replacing informal proof with rigorous proof, which has an immense importance in both mathematics and mathematics education. Despite the previous statement, these thoughts of pre-service primary teachers are parallel with many fundamental theories. However, research demonstrates that problems exist on the application on the subject of benefiting from concrete materials. The important factors emerging this situation are knowledge, beliefs and experiences of teachers. In that case, more efforts should be made for pre-service primary teachers in order to make them acquire enough knowledge, belief and experiences on the subject of benefiting from concrete materials in teaching mathematics during their undergraduate years. To this end, enactive proof activities can be incorporated into the mathematics and teaching mathematics courses when it is appropriate besides the use of concrete materials. Thus, pre-service primary teachers are encouraged for to be included in the process of constructing proof.

Pre-service primary teachers touch upon these limitations: the process of developing concrete model used in enactive proving takes more time and developing concrete model requires much manual skills. Pre-service primary teachers also stated that they take into consideration the Examination System in Turkey. Additionally, they draw attention to competing with time during the process of the preparation for the exams. The hesitations of pre-service primary teachers on the use of different approaches considering the examination system can be seen as a worrying situation.

Most of the pre-service primary teachers agree that enactive proving is more convincing and exploratory than the proofs done through formal ways. Pre-service primary teachers like enactive proofs that are at more basic level than formal proof and this situation can be considered as an opportunity for preparing them for their professions because the students that those pre-service primary teachers will be teaching to will be also at the basic level regarding the subject of proof. Here, pre-service primary teachers should not be misled on the place and importance of formal proof subject that they believe is unavoidable.

As a result, based on the findings, pre-service primary teachers should be provided with the opportunity to learn mathematical proofs that they encounter in their mathematics and mathematics education courses by making them more meaningful during their undergraduate years. To this end, incorporating the enactive proofs including visualization and the use of concrete materials into the mathematics courses should be supported. However, it is necessary to be careful about not to perceive the enactive proof as a formal proof or on the issue of replacing enactive proof with formal proof. Together with starting their profession, increasing the experiences of pre-service primary teachers about benefiting from various arguments in different formats in order to persuade their students on why a mathematical hypothesis is true if the age range of students is thought is extremely important. Moving here, it should be cared that experiencing different proofs such as enactive proof by using concrete materials while explaining mathematical hypothesis and relationships in the courses of Basic Mathematics and Teaching Mathematics of pre-service primary teachers during their education.